

COMPENDIO

DEL

CALCOLO SUBLIME

DEL

CAVALIERE BRUNACCI,

MEMBRO DELL' ISTITUTO

E

PROFESSORE NELL' UNIVERSITA DI PAVIA.

AD USO

DELLE UNIVERSITA DEL REGNO.

VOLUME SECONDO.



MILANO,

DALLA STAMPERIA REALE,

1811.

INDICE

de' Capi della Parte III.

CALCOLO INTEGRALE.

COMPENDIO
DEL CALCOLO SUBLIME.

PARTE III.

CALCOLO INTEGRALE.



CAPO PRIMO.

Integrazione dei differenziali algebratici e razionali.

§ 131. Il calcolo integrale disfà ciò che ha fatto il differenziale; in questo si cercano i differenziali delle funzioni e dell' equazioni, ed in quello dalla cognizione dei differenziali si vuol risalire alle funzioni ed all' equazioni da cui dipendono. Si chiama *integrale* quella funzione o equazione dalla quale per mezzo della differenziazione si ricava il proposto differenziale; così x^2 è l' integrale di $2xdx$. Colla lettera $\int$ posta avanti ad un dato differenziale s'indica il di lui integrale, e perciò si ha $x^2 = \int 2xdx$. Chiamasi poi integrale dell' ordine *primo*, *secondo*, ecc. n^{esimo} quella funzione della quale debbon farsi una, due, ecc. n differenziazioni onde avere un proposto differenziale. L' ordine dell' integrale s' esprime con un indice dato a quel segno $\int$; così x^4 è l' integrale secondo di $12x^2dx^2$, e si ha $x^4 = \int^2 12x^2dx^2$; in generale se $zdx^n = d^n u$, si ha $u = \int^n zdx^n$. Siccome ad ogni differenziazione può da una funzione svanire una costante, così ad ogni integrazione si aggiunge

una costante che chiamasi *arbitraria*, perchè di essa non ne è determinato il valore.

Ad un integrale il quale contiene tante costanti arbitrarie quanto è il di lui ordine, si dà il nome di completo; così $x^2 + A$ è l'integrale completo di $2xdx$.

Queste costanti arbitrarie si determinano col soddisfare a certe condizioni; e quando sono in sì fatto modo determinate, niente più resta arbitrario nell'integrale. Ordinariamente si danno alle costanti tali valori che facciano cominciare l'integrale da un dato valore della variabile, o sia facciano in modo che l'integrale sia nullo quando la variabile ha quel dato valore. Se poi dopo aver determinata la costante si assegna alla variabile un altro valore cui debba terminar l'integrale, allora questo integrale chiamasi *definito*, ed *indefinito* prima di queste determinazioni.

I due valori della variabile ove comincia e finisce l'integrale chiamansi *limiti* dell'integrale; così se l'integrale di $2xdx$ debbe cominciare da $x = a$, si ha $0 = a^2 + A$, quindi $A = -a^2$, e però $\int 2xdx = x^2 - a^2$; se poi l'integrale debbe terminarsi ad $x = b$, si ha $\int 2xdx = b^2 - a^2$. Questo è l'integrale definito: $x = a$, $x = b$ ne sono i limiti.

DIFFERENZIALI.	INTEGRALI COMPLETI.
$(a + x)^n dx$	$\frac{(a + x)^{n+1}}{n + 1} + C$
$\frac{dx}{a + x}$	$\log (a + x) + C$
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$	$\log \{ x + \sqrt{(a^2 + x^2)} \} + C$
$\frac{dx}{x\sqrt{(a^2 + x^2)}}$	$\frac{1}{2a} \log \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)} - a}{\sqrt{(a^2 + x^2)} + a} + C$
$\frac{dx}{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}$	$\frac{1}{2a} \log \frac{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}} + C$

DIFFERENZIALI.	INTEGRALI COMPLETI.
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$	$A\ sen\ \frac{x}{a} + C$,
	ovvero $- A\ cos\ \frac{x}{a} + C$
$\frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} A\ tang\ \frac{x}{a} + C$,
	ovvero $- \frac{1}{a} A\ cot\ \frac{x}{a} + C$
$\frac{dx}{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}$	$\frac{1}{a} A\ sec\ \frac{x}{a} + C$,
	ovvero $- \frac{1}{a} A\ cosec\ \frac{x}{a} + C$
$e^x dx$	$e^x + C$
$\frac{dx}{x\ log.\ x}$	$log\ log\ x + C$
$\frac{dx}{x\ log\ x\ log\ log\ x}$	$log\ log\ log\ x + C$
ecc.	ecc.
$\frac{dx}{x}(log\ x)^n$	$\frac{(log\ x)^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{dx}{x\ log\ x}(log\ log\ x)^n$	$\frac{(log\ log\ x)^{n+1}}{n+1} + C$
ecc.	ecc.
$dx\ cos\ x$	$sen\ x + C$
$dx\ sen\ x$	$- cos\ x + C$

DIFFERENZIALI.	INTEGRALI COMPLETI.
$dx \cos x \cdot (\operatorname{sen} x)^m$	$\frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{m+1} + C$
$dx \operatorname{sen} x \, (\cos x)^m$	$-\frac{(\cos x)^{m+1}}{m+1} + C$
$\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tang} x + C$
$\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$	$-\operatorname{cotang} x + C$
$\frac{dx \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$	$\sec. x + C$
$\frac{dx \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$	$-\operatorname{cosec.} x + C.$

Premesse queste integrazioni delle formole che più frequentemente s' incontrano, prendiamo la formola generale Xdx, ove X rappresenta una funzione dell' x.

Questa funzione può essere algebratica o trascendente, razionale o irrazionale; e qui si vuole avvertire che se gl' irrazionali ed i trascendenti non risguardano la variabile x, la funzione X è sempre razionale ed algebratica: incominciamo a considerarla algebratica e razionale. È dimostrato nella introduzione al calcolo sublime che in tale ipotesi la funzione X si scompone in una serie finita di termini così fatti

$$ax^n, \ \frac{a}{(p+qx)^n}, \ \frac{a+bx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n},$$ indicando

con a, b, p, q, β quantità costanti, e con n un numero intero; dunque l' integrazione della formola Xdx dipende da quella delle formole

1.ª ... $ax^n dx$, 2.ª ... $\frac{adx}{(p+qx)^n}$,

3.ª ... $\frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$.

L' integrale completo della prima è

$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$ (*): quello della seconda, quando n è maggiore di 1, è

$$\int \frac{adx}{(p+qx)^n} = c - \frac{a}{(n-1)\,q\,(p+qx)^{n-1}},$$

e quando $n=1$, $\int \frac{adx}{p+qx} = \frac{a}{q}\log(p+qx) + c$,

indicando con c una costante arbitraria.

§ 132. Veniamo alla terza. Sia primieramente $n=1$, vogliasi, cioè, integrare la formola

$\int \frac{(a+bx)\,dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$: facciamo $p^2+2pqx\cos\beta+$

(*) Questa formola è erronea quando $n=-1$, poichè allora ci dà $\int\frac{adx}{x}=\frac{a}{0}+c$; ma in questo caso si sa inoltre che $\int\frac{adx}{x}=a\log x+c$. Per ispiegare questo paradosso, primieramente osservo che la formola doveva essere appunto difettosa in quel caso, poichè i differenziali delle potenze intiere

..... x^{-1}, x^0, x^1, x^2, ... non contengono mai la potenza -1, ed in conseguenza non vi è nè può esservi nella serie delle potenze intiere della x una potenza che sia l' integrale di $x^{-1}dx$; nè una tal potenza potrebbe esser fratta, poichè le potenze fratte differenziate non possono mai diventare potenze intiere.

$q^2x^2 = t$, prendiamo il logaritmo di quest' equazione, e differenziando avremo

$$\frac{(2pq\cos\beta + 2q^2x)\,dx}{p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2} = \frac{dt}{t}, \text{ e quindi}$$

$$\frac{xdx}{p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2} = \frac{1}{2q^2}\cdot\frac{dt}{t} - \frac{p}{q}\cdot\frac{dx\cos\beta}{p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2}\text{: sarà dunque}$$

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2} = \frac{b}{2q^2}\int\frac{dt}{t} + \frac{aq - b\cos\beta\cdot p}{q}\int\frac{dx}{p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2}$$

$$= \frac{b}{2q^2}\log.t + \frac{aq - bp\cos\beta}{q}\int\frac{dx}{p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2}\text{: ora}$$

$p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2 = p^2\cdot sen^2\beta + (p\cos\beta + qx)^2$; onde fatto $p\cos\beta + qx = pu\,sen\,\beta$, si avrà

$dx = \frac{p\,sen\,\beta}{q}du$, e la formola

$\int\frac{dx}{p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2}$ diventerà $\frac{1}{pq\,sen\,\beta}\int\frac{du}{1+u^2}$, il cui integrale (§ 131) è

$\frac{1}{pq\,sen\,\beta}(Arc.\,tang.\,u + c)$: avremo dunque

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{p^2 + 2pqx\cos\beta + q^2x^2} = \frac{b}{2q^2}\log.t + \frac{aq - bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}(Arc.\,tang.\,u + c);$$

e sostituendo in vece dell' u e del t i loro respettivi valori, sarà

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2} = \frac{b}{2q^2}\log.(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)$$

$$+\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}\left(Arc.\,tang\frac{p\cos\beta+qx}{p\,sen\,\beta}+C\right).$$

Essendo C una costante arbitraria, essa si può anco portare fuori delle parentesi. Allora l' ultimo termine dell' integrale diventa

$$\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}Arc.\,tang\frac{p\cos\beta+qx}{p\,sen\,\beta}+C.$$

Si può anche far quest' altra riduzione.

Pongasi $C=C'-\dfrac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}Ar\,tang\dfrac{\cos\beta}{sen\,\beta}$,

ed allora si avrà l' ultimo termine

$$\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}Ar\,tang\frac{p\cos\beta+qx}{p\,sen\,\beta}+C=$$

$$\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}\left\{Ar\,tang\frac{p\cos\beta+qx}{p\,sen\,\beta}-Ar\,tang\frac{\cos\beta}{sen\,\beta}\right\}+C'=$$

$$\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}Ar\,tang\frac{\dfrac{p\cos\beta+qx}{p\,sen\,\beta}-\dfrac{\cos\beta}{sen\,\beta}}{1+\dfrac{p\cos\beta+qx}{p\,sen\,\beta}\cdot\dfrac{\cos\beta}{sen\,\beta}}+C'=$$

$$\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}Ar\,tang\frac{qx\,sen\,\beta}{p+qx\cos\beta}+C'.$$

Questo integrale non soddisfà pel caso in cui $\beta=0$, poichè il di lui secondo membro diviene infinito: allora però la formola da integrarsi è

$\displaystyle\int\frac{(a+bx)\,dx}{(p+qx)^2}$; questa si risolve nelle due

$\int \frac{bdx}{q(p+qx)}$, $\int \frac{(aq-bp)\,dx}{q\,(p+qx)^2}$, gl' integrali delle quali (§ 131) sono $\frac{b}{q^2} \log(p+qx)$, $-\frac{aq-bp}{q^2\,(p+qx)}+C$.

Se noi potremo ridurre l' integrale della formola $\frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$ a quello di

$\frac{dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}$, allora potrà considerarsi come ottenuto l' integrale $\int \frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$ poichè, qualunque sia n, arriveremo finalmente alla formola $\int \frac{dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$, la quale abbiamo già integrata.

Perciò poniamo

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n} = \frac{A+Bx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}$$
$$+\int \frac{Cdx}{(p^2+2px\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}},$$

essendo A, B, C quantità costanti da determinarsi. Differenziamo ed avremo

$$\frac{a+bx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n} = -\frac{(n-1)\,(A+Bx)}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n} \times$$
$$(2pq\cos\beta+2q^2x)+\frac{B+C}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}:$$

ora riducendo allo stesso denominatore, ed eguagliando i numeratori, si avrà

$$a+bx=(B+C)p^2-2A(n-1)pq\cos\beta+\{2B+2C-2B(n-1)\}pqx\cos\beta-2A(n-1)q^2x+\{B+C-2B(n-1)\}q^2x^2;$$

e quindi eguagliando a zero i coefficienti delle diverse potenze di x, otterremo

$$(B+C)p^2-2A(n-1)pq\cos\beta=a$$

$$\{2(B+C)-2B(n-1)\}pq\cos\beta-2A(n-1)q^2=b$$

$B+C-2B(n-1)=0$, dalle quali si ricava

$$A=\frac{aq\cos\beta-bp}{2(n-1)pq^2(sen\,\beta)^2},$$

$$B=\frac{aq-bp\cos\beta}{2(n-1)p^2q(sen\,\beta)^2},$$

$$C=\frac{(2n-3)(aq-bp\cos\beta)}{2(n-1)p^2q(sen\,\beta)^2},$$

ed in conseguenza $\int\frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}=$

$$\frac{apq\cos\beta-bp^2+(ap^2-bpq\cos\beta)x}{2(n-1)p^2q^2(sen\,\beta)^2(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}+$$

$$\int\frac{(2n-3)(aq-bp\cos\beta)\,dx}{2(n-1)p^2q(sen\,\beta)^2(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Per esempio, si cerchi il valore di

$$\int\frac{3x^4+10x^3+9x^2+3x+4}{(1-x-x^2-2x^3)^2}dx=\int\frac{3dx}{(1-2x)^2}$$

$+\int\frac{(1+x)dx}{(1+x+x^2)^2}$. Paragonando $\int\frac{3dx}{(1-2x)^2}$ con

la formola $\int\frac{adx}{(p+qx)^n}$, si avrà

$a=3$, $p=1$, $q=-2$, $n=2$, e quindi

$$\int\frac{3dx}{(1-2x)^2}=c+\frac{3}{2(1-2x)}.$$

Nel modo stesso paragonando

$$\int\frac{(1+x)\,dx}{(1+x+x^2)^2} \text{ con } \int\frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}, \text{ si avrà}$$

$a=1$, $b=1$, $p=1$, $q=1$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, $n=2$,

e per conseguenza

$$\int\frac{(1+x)\,dx}{(1+x+x^2)^2}=\frac{-1+x}{3(1+x+x^2)}+\int\frac{dx}{3(1+x+x^2)}:$$

siamo adunque al punto d integrare $\frac{dx}{3(1+x+x^2)}$.

Il paragone di questa con la formola

$\frac{(a+bx)\,dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$ ci dà

$a=1$, $b=0$, $p=q=1$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, e perciò

$$\int\frac{dx}{3(1+x+x^2)}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\,Arc.\,tang.\,\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C;$$

sarà pertanto $\int\frac{3x^4+10x^3+9x^2+3x+4}{(1-x-x^2-2x^3)^2}\,dx=$

$$\int\frac{3x^4+10x^3+9x^2+3x+4}{(1-2x)^2(1+x+x^2)^2}\,dx=\int\frac{3dx}{(1-2x)^2}$$

$$+\int\frac{(1+x)\,dx}{(1+x+x^2)^2}=\frac{3}{2(1-2x)}+\frac{-1+x}{3(1+x+x^2)}$$

$$+\int\frac{dx}{3(1+x+x^2)}=\frac{3}{2(1-2x)}+\frac{-1+x}{3(1+x+x^2)}$$

$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\,Arc.\,tang.\,\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C$, essendo C la costante arbitraria che rende l' integrale completo.

§ 133. Terminiamo questo capo con esporre un teorema il quale contiene una importantissima proprietà degl' integrali delle funzioni.

Se per fx *rappresentiamo una funzione qualunque di* x, *e per* Fx *la somma di tutt' i valori possibili che può ricevere la* fx, *cioè di tutt' i valori da* f(o) *sino a* f(x) *inclusivamente, i quali sono* x *di numero, sarà sempre* $Fx = \int f(x)dx$.

In fatti se x diviene $x+\omega$, sarà $F(x+\omega)$ la somma di tutt' i valori possibili da $f(o)$ sino a $f(x+\omega)$ inclusivamente, i quali sono $x+\omega$ di numero: ora $\omega f(x)$ esprime la somma di un numero ω di valori eguali ciascuno a fx, ed $\omega f(x+\omega)$ esprime la somma di un numero ω di valori eguali ciascuno a $f(x+\omega)$; e siccome di queste due somme una esser debbe minore, l' altra maggiore di $F(x+\omega)-F(x)$ {imperciocchè si suppone che i valori di fx vadano sempre crescendo o scemando da $f(x)$ sino a $f(x+\omega)$}, avremo dunque

$$\omega f(x+\omega) = \omega f(x) + \omega^2\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{\omega^3}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + \text{ecc.}$$

maggiore di $F(x+\omega)-F(x)=\omega\left(\frac{dF}{dx}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+$ecc.

maggiore di $\omega f(x)$; dunque

$$\omega f(x+\omega) - \omega f(x) > \omega f(x+\omega) - F(x+\omega) + F(x),$$

ovvero $\omega^2\left(\frac{df}{dx}\right)+\frac{\omega^3}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)+$ ecc. $>\omega\left\{f(x)-\left(\frac{dF}{dx}\right)\right\}$

$+\,\omega^2\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\right\}+$ ecc., la qual cosa dovendo esser vera comunque piccolo si prenda ω, si avrà (§ 57) il coefficiente di ω eguale a zero, cioè $\left(\frac{dF}{dx}\right)-f(x)=o$, da cui $F(x)=\int f(x)\,dx$.

In generale qualunque funzione di x sia la variabile u, sempre $\int f(u)\cdot du$, ovvero

$\int f(u)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ sarà la somma di tutti i valori possibili di $f(u)$ da $u=0$ sino ad u.

La stessa formola ci esprime anche la somma dei valori di $f(u)$ da $u=b$ sino ad u, e ciò per mezzo dell' opportuna determinazione della costante introdotta dall' integrazione; in fatti indicando quell' integrale con $F(u)$, si ha $\int f(u)\cdot du = Fu + C$, e supponendo che la nostra somma o l' integrale cominciar debba da $u=b$, si avrà $0=Fb+C$, quindi $C=-Fb$, ed in conseguenza $\int f(u)\,du = Fu - Fb$.

CAPO II.

Integrazione dei differenziali algebratici ed irrazionali.

§ 134. Generalmente parlando un differenziale irrazionale non può integrarsi che riducendolo razionale, e ciò per lo più non si ottiene che con particolari ripieghi i quali non si possono apprendere che coll' esercitarsi ad adoperarli:

1.° Sia da integrarsi la funzione differenziale $\frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}}$, cui conduce il problema risoluto al § 129.

Poniamo $\sqrt{v}=y-\frac{b}{2c}$, ed otterremo

$$\frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}}=2\frac{dy}{a-\frac{b}{4c}+cy^2};$$

quindi facendo $\alpha^2=\frac{b^2-4ac}{4c^2}$, si avrà

$$\int\frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}}=\frac{2}{c}\int\frac{dy}{(y+\alpha)(y-\alpha)}=\frac{1}{c\alpha}\log\frac{y-\alpha}{y+\alpha}$$

$+C$; e riponendo il valore di y dato per mezzo

del v, sarà

$$\int \frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}} = \frac{1}{c\alpha} \log \frac{2c\sqrt{v}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{v}+b+2c\alpha} + C.$$

Debba quest' integrale cominciare da $v=V$; si avrà allora $0 = \frac{1}{c\alpha} \log \frac{2c\sqrt{V}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{V}+b+2c\alpha} + C$, quindi $C = -\frac{1}{c\alpha} \log \frac{2c\sqrt{V}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{V}+b+2c\alpha}$; e se vorremo che si estenda sino a $v=H$, l' integrale definito sarà

$$\int \frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}} = \frac{1}{c\alpha} \log \frac{2c\sqrt{H}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{H}+b+2c\alpha} - \frac{1}{c\alpha} \log \frac{2c\sqrt{V}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{V}+b+2c\alpha}.$$

2.° Vogliasi il valore di $\int \frac{\sqrt{z}\cdot dz}{\sqrt{(1+z)}}$.

Si moltiplichi il numeratore e denominatore per $\sqrt{z}$, e si avrà $\int \frac{zdz}{\sqrt{(z+z^2)}}$. Per ottenere il bramato integrale, poniamo $1+z=u^2z$, e sarà $z=\frac{1}{u^2-1}$; quindi $dz = -\frac{2udu}{(u^2-1)^2}$, e perciò

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{(z+z^2)}} = -\int \frac{2du}{(u^2-1)^2};$$ ma

$$\frac{1}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{4(u-1)^2} + \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)};$$

dunque

$$-\int \frac{2du}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2u}{u^2-1} + \log\frac{u-1}{u+1}\right\} + C;$$ e perciò

$$\int \frac{\sqrt{z} \cdot dz}{\sqrt{(1+z)}} = \frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{(z+z^2)} + log \frac{\sqrt{(1+z)} - \sqrt{z}}{\sqrt{(1+z)} + \sqrt{z}} \right\} + C.$$

3.° Sia X una funzione razionale delle due quantità x^n, ed $s = \sqrt[m]{\frac{a + bx^n}{f + gx^n}}$, e si voglia liberare dalla irrazionalità la formola $\frac{Xds}{x}$.

Poniamo $\sqrt[m]{\frac{a + bx^n}{f + gx^n}} = z$; sarà $x^n = \frac{fz^m - a}{b - gz^m}$,

e presi i logaritmi $nlx = l(fz^m - a) - l(b - gz^m)$;

quindi differenziando $n\frac{dx}{x} = \frac{m(bf - ag)z^{m-1}dz}{(fz^m - a)(b - gz^m)}$;

se ora si sostituiscono questi valori nella formola proposta, si libererà essa dall' irrazionalità.

4.° Essendo x una qualunque funzione razionale delle due variabili x, $s = \sqrt{(a + bx \pm x^2)}$, così si riduce integrabile la formola $\int Xdx$.

Supponiamo $\sqrt{(a + bx \pm x^2)} = \sqrt{a} + xz$, ed avremo

$a + bx \pm x^2 = a + 2\sqrt{a} \cdot zx + x^2z^2$, donde si ricava

$$x = \frac{b - 2z\sqrt{a}}{z^2 \mp 1}, \qquad dx = \frac{2z^2\sqrt{a} \pm 2\sqrt{a} - 2bz}{(z^2 \mp 1)^2} dz,$$

$\sqrt{(a + bx \pm x^2)} = \frac{-z^2\sqrt{a} \mp \sqrt{a} + bz}{z^2 \mp 1}$; e fatte le opportune sostituzioni, sarà tolta l' irrazionalità della formola $\int Xdx$.

Per esempio, sia $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a + bx \pm x^2)}}$,

ed avremo $dy = -\frac{2dz}{z^2 \mp 1}$, $y = -\int \frac{2dz}{z^2 \mp 1}$.

L' integrale di $\frac{2dz}{z^2 - 1}$ è $log \frac{z-1}{z+1} + C$; dunque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+x^2)}} = -log \frac{z-1}{z+1} + C.$$

L' integrale di $\frac{2dz}{z^2+1}$ è $2\,Arc.\,tang\,z + C$; dunque

$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx-x^2)}} = -2\,Arc.\,tang\,z + C$, ponendo nel primo caso $z = \frac{\sqrt{(a+bx+x^2)} - \sqrt{a}}{x}$, e nel secondo $z = \frac{\sqrt{(a+bx-x^2)} - \sqrt{a}}{x}$.

§ 135. Vediamo ora in quali casi possa rendersi razionale la formola $x^{m-1} dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Poniamo $a+bx^n = u^q$, e sarà $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = u^p$,

$x^n = \frac{u^q - a}{b}$, $x^m = \left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$, e quindi

$$x^{m-1}\,dx = \frac{q}{nb} u^{q-1}\,du \cdot \left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}} :$$

avremo dunque

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \int \frac{q}{nb} u^{p+q-1}\,du \cdot \left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}},$$

ed il secondo membro di quest' equazione sarà razionale ogni qual volta $\frac{m}{n}$ sarà un membro intiero.

Facciamo nella stessa formola $a+bx^n = x^n z^q$, ed avremo

$$x^n = \frac{a}{z^q - b}, \quad (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}} z^p}{(z^q - b)^{\frac{p}{q}}}, \quad x^m =$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^q - b)^{\frac{m}{n}}}; \text{ quindi } x^{m-1}dx = \frac{-qa^{\frac{m}{n}} z^{q-1} dz}{n(z^q-b)^{\frac{m}{n}+1}},$$

e la nostra formola diventerà

$$\frac{-qa^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} z^{p+q-1} dz}{n(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}},$$ la quale sarà razionale ogni qual volta $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ sarà un numero intiero.

Integriamo, per esempio, $x^3 dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{3}}$: sarà $m=4$, $n=2$, $p=1$, $q=3$; quindi $\frac{m}{n}=2$ numero intiero; dunque la prima trasformazione ci darà

$$\int x^3 dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2b}\int u^3 \frac{u^3-a}{b}\,du = \frac{3u^7}{14b^2} - \frac{3au^4}{8b^2} + c$$

$$= \frac{3}{14b^2}(a+bx^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3a}{8b^2}(a+bx^2)^{\frac{4}{3}} + c.$$

Per rendere razionale la formola differenziale più complicata $x^{m-1}dx\left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}$, facciamo

$$\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}=u^q\text{, ed avremo }\left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}=u^p,$$

$$x^n=\frac{a'u^q-a}{b-b'u^q},\ x^m=\left(\frac{a'u^q-a}{b-b'u^q}\right)^{\frac{m}{n}},\text{ ed}$$

$$x^{m-1}\,dx=\frac{q}{n}\left(\frac{a'u^q-a}{b-b'u^q}\right)^{\frac{m}{n}-1}\times$$

$$\left(\frac{a'u^{q-1}du}{b-b'u^q}+\frac{b'(a'u^q-a)u^{q-1}\,du}{(b-b'u^q)^2}\right).$$

La nostra formola diverrà dunque

$$\frac{q}{n}\cdot\frac{u^{p+q-1}du}{b-b'u^q}\left(\frac{a'u^q-u}{b-b'u^q}\right)^{\frac{m}{n}-1}\cdot\left(a'+\frac{b'(a'u^q-a)}{b-b'u^q}\right),$$

e sarà razionale se $\frac{m}{n}$ è un numero intiero.

§ 136. L' integrale di questa formola

$x^{m+\alpha n-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+\beta}$, nella quale α, β sono due numeri intieri, potrebbe sempre dedursi dall' integrale di quella trattata al § antecedente. In fatti differenziamo la funzione

$$x^m\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}\text{, ed avremo}$$

$$d\{x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}\}=(max^{m-1}dx+mbx^{m+n-1}dx$$

$$+\frac{n(p+q)}{q}bx^{m+n-1}dx)(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

donde ricaveremo

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}=ma\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

$$+\frac{mq+np+nq}{q}b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

e quindi

$$(A)\ldots\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{(mq+np+nq)b}$$

$$-\frac{mqa}{(mq+np+nq)b}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}};$$

se poi in vece di m scriviamo $m-n$, avremo questa altra riduzione

$$(B)\ldots\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{(m-n)a}$$

$$-\frac{(mq+np)b}{(m-n)qa}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

Dunque l'integrale di $x^{m\pm n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$,

o generalmente quello di $x^{m\pm an-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$,

si potrebbe ricavare da $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Il differenziale di $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$ può mettersi anco sotto questo aspetto

$$\left(ma - \frac{(mq+np+nq)\,a}{q}\right) x^{m-1}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

$$+ \frac{mq+np+nq}{q} \cdot x^{m-1}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1},$$

allora si ha

$$(C) \ldots \int x^{m-1} dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{mq+(p+q)n}$$

$$+ \frac{n\,(p+q)\,a}{mq+n\,(p+q)} \int x^{m-1}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

e ponendo $p - q$ nel luogo di p, si ottiene

$$(D) \ldots \int x^{m-1} dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} = -\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{npa}$$

$$+ \frac{mq+np}{npa} \int x^{m-1}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

Dunque il valore della formola

$\int x^{m-1}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q} \pm 1}$ può ricavarsi da quello di

$\int x^{m-1}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, e generalmente a quest' ultima integrazione si può ridurre quello della formola

$\int x^{m-1}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q} \pm \beta}$.

§ 137. L' equazione in fine

$$d\{x^m\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\} = mx^{m-1}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

$$+ \frac{np}{q}\, bx^{n+m-1} \cdot dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$$ ci dà

$$(E)\ldots\int x^{m+n-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}=\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{npb}$$

$$-\frac{mq}{npb}\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$ e ponendo $m-n$, e $p+q$ in vece di m e di p, si avrà

$$(F)\ldots\int x^{m-n-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{m-n}$$

$$-\frac{n(p+q)b}{(m-n)q}\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

§ 138. Quando nelle quattro formole (A), (B), (D), (E) il coefficiente della seconda formola integrale svanisce, la prima ammette un integrale algebraico: abbiamo in fatti

$$(A),\quad m=0,\quad \int x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\frac{q(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{n(p+q)b};$$

$$(B),\quad \frac{p}{q}=-\frac{m}{n},\quad \int x^{m-n-1}dx\,(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}}$$

$$=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}+1}}{(m-n)a};$$

$$(D),\quad \frac{p}{q}=-\frac{m}{n},\quad \int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}-1}$$

$$=\frac{x^m(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}}}{ma};$$

(E), $m=0$, $\int x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}=\frac{q(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{npb}$.

Se il coefficiente della seconda formola integrale diviene infinito, le precedenti riduzioni sono di niun vantaggio: quando però ciò succede nelle riduzioni (A), (B), (C), (F) abbiam sempre $\frac{m}{n}$, ovvero $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$, eguale ad un numero intiero, ed allora quelle formole possono rendersi razionali: nelle altre due formole (D), (E) abbiamo in quel caso $p=0$, e le espressioni $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{a+bx^n}$, $\int\frac{x^{m+n-1}\,dx}{a+bx^n}$, sono da loro stesse razionali.

§ 139. Cerchiamo, per esempio, l'integrale della formola $\frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ove m è un numero intiero positivo. La prima riduzione ci darà

$$\int\frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x^m\sqrt{(1-x^2)}}{m+1}+\frac{m}{m+1}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

quindi i valori dispari di m ci daranno

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$=-\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1}{2}\,Arc.\ sen\,x+Cost.$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}$$

$$+\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\,Arc.\ sen.\ x+C.$$

E generalmente

$$\int \frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2i}x^{2i-1} + \frac{1(2i-1)}{2i(2i-2)}x^{2i-3} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots.3\cdot 1}{2i(2i-2)\ldots.4\cdot 2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}$$

$$+ \frac{(2i-1)(2i-3)(2i-5)\ldots 3\cdot 1}{2i(2i-2)(2i-4)\ldots.4\cdot 2} \textit{Arc sen } x + C;$$

E quei pari ci daranno

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{(1-x^2)} + \frac{2}{3}\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{(1-x^2)} + C'$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{4\cdot 1}{5\cdot 3}x^2 + \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\right)\sqrt{(1-x^2)} + C';$$

e generalmente

$$\int \frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2i+1}x^{2i} + \frac{2i}{(2i+1)(2i-1)}x^{2i-2}\right.$$

$$\left. + \frac{2i(2i-2)\ldots.4\cdot 2}{(2i+1)(2i-1)\ldots 3\cdot 1}\right)\sqrt{(1-x^2)} + C'.$$

In simil guisa troveremo

$$\int \frac{dx}{x^{2i+1}\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2ix^{2i}} + \frac{2i-1}{2i(2i-2)x^{2i-2}}\right.$$

$$\left. + \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 3}{2i(2i-2)\ldots\ldots 2x^2}\right)\sqrt{(1-x^2)}$$

$$+ \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 3}{2i(2i-2)\ldots\ldots 2}\, l\, \frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^{2i}\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{(2i-1)x^{2i-1}} + \frac{2i-2}{(2i-1)(2i-3)x^{2i-3}}\right.$$
$$\left. + \frac{(2i-2)(2i-4)\ldots\ldots 2}{(2i-1)(2i-3)\ldots 3\cdot x}\right)\sqrt{(1-x^2)} + C.$$

§ 140. Determiniamo le costanti C, C' delle due formole integrali $\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ in modo che queste si annullino quando $x=0$: si avrà

$$C=0,\ C' = \frac{2i(2i-2)(2i-4)\ldots\ldots 4\cdot 2}{(2i+1)(2i-1)\ldots\ldots 3\cdot 1},$$ e perciò

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2i}x^{2i-1} + \ldots\ldots\right.$$
$$\left. + \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 3\cdot 1}{2i(2i-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}\,x\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+ \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 3\cdot 1}{2i(2i-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}\ \text{Arc sen}\ x,$$

$$\int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2i+1}x^{2i} + \ldots\ldots\right.$$
$$\left. + \frac{2i(2i-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}{(2i+1)(2i-1)\ldots\ldots 3\cdot 1}\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+ \frac{2i(2i-2)(2i-4)\ldots\ldots 4\cdot 2}{(2i+1)(2i-1)\ldots\ldots 3\cdot 1}.$$

Quest' integrali cominciano quando $x=0$: per avere il loro valore sino ad $x=1$ si farà $x=1$ in queste due formole, ed otterremo

$$(1)\ldots\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 3\cdot 1}{2i(2i-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}\ \text{Arc sen}\ 1$$
$$= \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 3\cdot 1}{2i(2i-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$(2)\ldots\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2i\,(2i-2)\,(2i-4)\ldots 4\cdot 2}{(2i+1)\,(2i-1)\ldots 3\cdot 1},$$

essendo 2π la circonferenza del cerchio.

Queste due ultime formole sono buone, qualunque valore attribuiscasi alla lettera i. Supponiamola dunque infinita, e riflettendo che in questo caso abbiamo prossimamente

$$\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}},\text{ sarà}$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots\ldots}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots\ldots}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots\ldots}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots\ldots},$$

e quindi

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\text{ ecc.}$$

formola elegantissima per la rettificazione del circolo, la quale è stata ritrovata da *Wallis*.

Moltiplichiamo tra loro le formole (1), (2), ed

$$\text{avremo}\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{\pi}{2}:$$

questa equazione è vera per tutt' i valori di $2i$ positivi ed intieri, e cessa di esser tale negli altri casi; imperocchè le formole (1), (2) dalle quali essa dipende, dimandano quella condizione nel valore dell' i.

CAPO III.

Integrazione dei differenziali trascendenti.

§ 141. Per riuscire nella integrazione dei differenziali trascendenti, fa bisogno premettere una certa riduzione, la quale si chiama *Integrazione a parti*.

Se y e z rappresentano due qualunque funzioni della x, il calcolo differenziale ci dà

$d(yz) = z\left(\frac{dy}{dx}\right).dx + y\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$, o semplicemente

{ indicando $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$ con dy, e $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$ con dz },

$d(yz) = zdy + ydz$; ora integrando quest' ultima equazione, abbiamo $yz = \int zdy + \int ydz$, dalla quale ricaviamo $\int zdy = yz - \int ydz$, in virtù, pertanto di questa formola, il valore di $\int zdy$ dipende dall' altro $\int ydz$, il quale talune volte può essere più semplice di lui; così dovendosi integrare la formola Xdx, se potremo scomporre X in due fattori P e Q, tali chè uno di essi, per esempio Q moltiplicato per dx dia una differenziale esatta dV, avremo

$\int Xdx = \int PQdx = PV - \int V\left(\frac{dP}{dx}\right)dx$. I ripieghi da adoperarsi in questa scomposizione, affinchè la formola cui si riduce un integrale, sia più semplice di lui, non hanno regole generali.

Voglia integrarsi il differenziale $a^x Xdx$; X rappresenta una funzione qualunque di x.

Siccome $da^x = a^x dx \cdot la$, così $\int a^x dx = \frac{1}{la} a^x$,

e quindi integrando *a parti*, troveremo

$\int a^x Xdx = \frac{1}{la} a^x X - \int \frac{1}{la} a^x \cdot \left(\frac{dX}{dx}\right)dx$: ora supponendo

$\left(\frac{dX}{dx}\right) = P$, avremo $\int a^x Xdx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la}\int a^x Pdx$,

e continuando l' integrazione *a parti*

$\int a^x Xdx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la^2} a^x P + \frac{1}{la^2}\int a^x \left(\frac{dP}{dx}\right)dx$,

nella quale facendo $\left(\frac{dP}{dx}\right) = Q$, e seguitando lo stesso

metodo d' integrazione, troveremo

$$\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la^2} a^x P + \frac{1}{la^3} a^x Q - \frac{1}{la^3} \int a^x \left(\frac{dQ}{dx}\right) dx,$$

e così di mano in mano.

Se dunque X è una funzione razionale ed intiera dell' x, noi arriveremo in fine all' integrazione della formola $a^x dx$, della quale conosciamo l' integrale. Così l' integrale di $a^x (x^2 + bx + c) dx$ sarà

$$\int a^x (x^2 + bx + c) dx = \frac{1}{la} a^x (x^2 + bx + c)$$

$$- \frac{1}{la^2} a^x (2x + b) + \frac{1}{la^3} a^x \cdot 2 + C:$$

quello di $a^x x^n dx$, essendo n un numero intiero e positivo, sarà

$$\int a^x x^n dx = a^x \left\{ \frac{x^n}{la} - \frac{nx^{n-1}}{la^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{la^3} - \right.$$

$$\left. \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{la^4} + \ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1}{la^{n+1}} \right\} + C$$

il segno superiore è per n pari, e l' inferiore per n caffo.

Per determinare la costante, supponiamo che l' integrale debba svanire quando $x = 0$, ed avremo

$$C = \mp \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{la^{n+1}}.$$

§ 142. Avremmo potuto integrare la formola $a^x X dx$ anche in altra guisa; in fatti la stessa regola dell' integrazione *a parti* ci dà

$\int a^x X dx = a^x \int X dx - la \int (\int X dx) a^x dx$, e facendo $P = \int X dx$, si ha $\int a^x X dx = a^x P - la \int a^x P dx$.

Poniamo $\int P dx = Q$, ed avremo

$\int a^x X dx = a^x P - la \cdot a^x Q + la^2 \int a^x Q dx$; così fatto $\int Q dx = R$, si ha

$\int a^x X dx = a^x P - la \cdot a^x Q + la^2 \cdot a^x R - la^3 \int a^x R dx$,

e potremo continuare questa riduzione, finchè si giunga ad una formola integrabile, e molto più semplice della proposta. Con questo metodo cerchiamo l' integrale della formola $\frac{a^x dx}{x^n}$, essendo n un nnmero intero e positivo. Facendo $X = \frac{1}{x^n}$,

$$P = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}, \quad Q = \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}},$$

$$R = \frac{-1}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}, \text{ ecc. troveremo}$$

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$

$$-\frac{a^x la^2}{(u-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} - \ldots - \frac{a^x la^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot x}$$

$$+\frac{la^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}\int \frac{a^x dx}{x}:$$

Tutta la difficoltà pertanto si riduce all' integrazione della formola $\frac{a^x dx}{x}$, la quale non sappiamo integrare.

Se n sarà un numero fratto, l' una e l' altra riduzione ci dà l' integrale per mezzo di una serie infinita, che i nostri lettori faranno bene a trovare per esercitarsi nel calcolo.

§ 143. Pei differenziali logaritmici, proponiamoci d' integrare la formola $Pdx(lz)^n$, essendo P e z due funzioni dell' x.

Facciasi $\int Pdx = Q$, e la regola dell' integrazione *a parti* ci darà

$$\int Pdx(lz)^n = Q \,.\, lz^n - n\int \frac{Q}{z}(lz)^{n-1} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right) dx;$$

così l' integrazione richiesta è ridotta a quella di un differenziale nel quale il logaritmo lz è elevato ad una potenza minore di un' unità; continuando questa riduzione, si comprende che giungeremo in fine all' integrazione di una quantità algebratica, se però n sarà numero intiero e positivo.

Per esempio, vogliasi integrare $x^m dx(lx)^n$, ed avremo $P = x^m$, $z = x$, e perciò

$$\int x^m dx(lx)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m dx(lx)^{n-1}:$$

ora ponendo in quest' equazione $n-1$ in vece di n, sarà

$$\int x^m dx(lx)^{n-1} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^{n-1} - \frac{n-1}{m+1}\int x^m dx(lx)^{n-2},$$

e parimente

$$\int x^m dx(lx)^{n-2} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^{n-2} - \frac{n-2}{m+1}\int x^m dx(lx)^{n-3},$$

ecc.

Dunque ponendo una formola nell' altra, troveremo

$$\int x^m dx(lx)^n = x^{m+1}\left\{\frac{(lx)^n}{m+2} - n\frac{(lx)^{n-1}}{(m+1)^2}\right.$$
$$+ n(n-1)\frac{(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - n(n-1)(n-2)\frac{(lx)^{n-3}}{(m+1)^4}$$
$$\left. + \text{ecc.}\right\} + C.$$

Quest' espressione non è buona quando $m = -1$, ma allora si ha l'equazione

$$\int \frac{dx(lx)^n}{x} = (lx)^{n+1} - n\int \frac{dx}{x}(lx)^n,$$ da cui si ricava

$$(n+1)\int \frac{dx}{x}(lx)^n = (lx)^{n+1}\text{, e perciò}$$

$$\int \frac{dx}{x}(lx)^n = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

§ 144. Onde integrare la differenziale $\frac{Xdx}{(lx)^n}$, essendo X una funzione dell' x, faremo

$$\frac{Xdx}{(lx)^n} = Xx \cdot \frac{dx}{x(lx)^n}\text{, ed allora l'integrazione } a\ parti$$

ci darà

$$\int Xx \cdot \frac{dx}{x(lx)^n} = -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{d\cdot Xx}{(lx)^{n-1}};$$

Poniamo successivamente $d\cdot Xx = Pdx$, $d\cdot Px = Qdx$, $d\cdot Qx = Rdx$, e continuando la stessa riduzione, troveremo

$$\int \frac{Xdx}{(lx)^n} = -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{Px}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}$$

$$+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots.2\cdot 1}\int \frac{Vdx}{lx}.$$

Facciamo ora $X = x^m$, ed avremo $P = (m+1)x^m$, $Q = (m+1)^2 x^m$, $R = (m+1)^3 x^m$, ecc, e perciò

$$\int \frac{x^m dx}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}$$

$$-\frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots.$$

$$+\frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots.3\cdot 2\cdot 1}\int \frac{x^m dx}{lx}.$$

La formola $\int \frac{x^m dx}{lx}$ riducesi ancor più semplice facendo $x^{m+1} = z$; in fatti essa allora diviene $\int \frac{dz}{lz}$, e se poniamo $z = e^u$, avremo $\int \frac{dz}{lz} = \int \frac{e^u du}{u}$.

Dall' integrazione del $\frac{dz}{lz}$ dipende l' integrale del $dzllz$: di fatto la regola d' integrazione *a parti* ci dà

$\int dzllz = zllz - \int \frac{dz}{lz}$;

Dalla medesima formola dipende anche l' integrale di $\frac{dz}{llz}$; di fatto facendo $lz = x$, si ha

$$\int \frac{dz}{llz} = \int \frac{e^x dx}{lx} = \int \frac{dx}{lx} \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \text{ecc.} \right\}.$$

Per integrare $x^{nx} dx$, noi cominceremo dallo sviluppare in serie la quantità esponenziale x^{nx}, ed avremo

$$x^{nx} = 1 + nxlx + \frac{n^2x^2(lx)^2}{2} + \frac{n^3x^3(lx)^3}{2 \cdot 3} + \text{ecc.};$$

sarà allora

$$\int x^{nx} dx = \int \left\{ 1 + nxlx + \frac{n^2x^2(lx)^2}{2} + \frac{n^3x^3(lx)^3}{2 \cdot 3} + \text{ecc.} \right\} dx$$

$$= \int dx + n \int xdxlx + \frac{n^2}{2} \int x^2 dx(lx)^2 + \text{ecc.};$$

l' integrazione dunque di $x^{nx} dx$ dipende da formole che abbiamo integrate qui sopra.

OSSERVAZIONE.

Siccome $\frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x}$, così tanto lx, quanto $l(-x)$ può essere l'integrale del $\frac{dx}{x}$. Di qui è che la forma generale dell'integrale del $\frac{dx}{x}$ è $l(\pm x) + C$, essendo C la costante arbitraria.

§ 145. Parliamo ora dell'integrazione delle funzioni nelle quali entrano i trascendenti circolari.

Sia ϕ un angolo il cui seno, tangente ecc., sia una funzione dell'x, pel che abbiasi $d\phi = udx$, e vogliasi integrare $Xdx \cdot \phi^n$. Poniamo $\int Xdx = P$, sarà $Xdx\phi^n = \phi^n dP$, ed avremo

$\int Xdx\phi^n = \phi^n P - n\int \phi^{n-1} Pudx$. Nella stessa guisa sia $\int Pudx = Q$, e s'avrà

$\int \phi^{n-1} Pudx = \phi^{n-1} Q - (n-1) \cdot \int \phi^{n-2} Qudx$;

così fatto $\int Qudx = R$, sarà

$\int \phi^{n-2} Qudx = \phi^{n-2} R - (n-2) \cdot \int \phi^{n-3} Rudx$.

In questo modo la potenza del ϕ continuamente si abbasserà, ed arriveremo ad una formola (quando n sia un numero intiero e positivo) nella quale non sarà più ϕ. Qui si suppone però che possano ottenersi gl' integrali $\int Xdx$, $\int Pudx$, $\int Qudx$ ecc.

Per esempio: sia $\phi = An.\ sen\ x$, e sarà

$d\phi = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Ora si debba integrare la formola $\phi^n dx$. In tal caso $X = 1$; $P = x$,

$$Q=\int\frac{Pdx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\sqrt{(1-x^2)},\ R=\int\frac{Qdx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-x;$$

$$S=\int\frac{Rdx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\sqrt{(1-x^2)},\quad T=x,\ \text{ecc.}$$

avremo dunque

$$\int\phi^n\,dx=\phi^n\,x+n\phi^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}-n(n-1)\,\phi^{n-2}\times$$
$$x-n(n-1)(n-2)\,\phi^{n-3}\sqrt{(1-x^2)}+\text{ecc.}$$

Facciamo successivamente $n=1, 2, 3$, ec., e si avrà

$$\int\phi dx=\phi\cdot x+\sqrt{(1-x^2)}-1$$
$$\int\phi^2 dx=\phi^2\cdot x+2\phi\cdot\sqrt{(1-x^2)}-2\cdot 1\cdot x$$
$$\int\phi^3\,dx=\phi^3\cdot x+3\phi^2\cdot\sqrt{(1-x^2)}-3\cdot 2\cdot\phi\cdot x$$
$$-3\cdot 2\cdot 1\cdot\sqrt{(1-x^2)}+6,\ \text{ecc.}$$

Le costanti sono state determinate in maniera che gl' integrali si annullino, quando $x=0$, nel qual caso anche $\phi=0$.

§ 146. Veniamo ad integrare quelle formole ove trovansi seni e coseni di un arco variabile.

Già sappiamo che $\int dx\cos x=\operatorname{sen}x+C$, e che $\int dx\operatorname{sen}x=-\cos x+C$: proponiamoci adunque di integrare $dx(\operatorname{sen}x)^m$, $dx(\cos x)^m$: per la prima, la regola dell' integrazione a parti ci dà

$$\int dx(\operatorname{sen}x)^m=-(\operatorname{sen}x)^{m-1}\cdot\cos x$$
$$+(m-1)\int dx(\operatorname{sen}x)^{m-2}\cdot(\cos x)^2,$$ e sostituendo $1-(\operatorname{sen}x)^2$ in vece di $(\cos x)^2$, s' avrà

$$\int dx(\operatorname{sen}x)^m=-(\operatorname{sen}x)^{m-1}\cos x$$
$$+(m-1)\int dx(\operatorname{sen}x)^{m-2}-(m-1)\int dx(\operatorname{sen}x)^m,$$

e quindi

$$(A)\ldots\int dx(\operatorname{sen}x)^m=-\frac{1}{m}(\operatorname{sen}x)^{m-1}\cos x$$
$$+\frac{m-1}{m}\cdot\int dx(\operatorname{sen}x)^{m-2}$$; così l' integrazione

di $dx\,(sen\,x)^m$ dipende da quella di una formola, nella quale $sen\,x$ è elevato ad una potenza inferiore di due unità.

Poniamo nell' equazione (A), $m-2$ in vece di m, ed avremo

$$(B)\ldots \int dx\,(sen\,x)^{m-2} = -\frac{1}{m-2}(sen\,x)^{m-3}\cos x + \frac{m-3}{m-2}\int dx\,(sen\,x)^{m-4};$$

nella stessa guisa troveremo

$$(C)\ldots \int dx\,(sen\,x)^{m-4} = -\frac{1}{m-4}(sen\,x)^{m-5}\cos x + \frac{m-5}{m-4}\int dx\,(sen\,x)^{m-6}, \text{ ecc.}$$

Se m è un numero intiero e positivo, giungeremo in fine alla formola $\int dx = x$, quando è pari; ed alla formola $\int dx\,sen\,x = -\cos x$ quando m è caffo.

In ambedue questi casi ponendo l' equazioni ecc. (C), (B), (A) l' una nell' altra, troveremo

$$\int dx\,(sen\,x)^m = C - \frac{\cos x}{m}\Big\{(sen\,x)^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}(sen\,x)^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}(sen\,x)^{m-5} + \ldots\ldots + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots.3}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots.2}sen\,x\Big\} + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots.3}{m(m-2)(m-4)(m-6)\ldots.2}x,$$

pel caso dell' m pari; e per quello dell' m dispari

$$\int dx\,(sen\,x)^m = C - \frac{\cos x}{m}\Big\{(sen\,x)^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}(sen\,x)^{m-3}$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}(sen\,x)^{m-5}+\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 2}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 1}\right\}.$$

§ 147. Per integrare la seconda formola $dx(cos\,x)^m$, facciamo $x=90^\circ-y$, ed avremo

$$\int dx\,(cos\,x)^m=-\int dy\,(sen\,y)^m=-C+$$

$$\frac{cos\,y}{m}\left\{(sen\,y)^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}(sen\,y)^{m-3}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 2}sen\,y\right\}-$$

$$\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 2}\,y=-C$$

$$+\frac{sen\,x}{m}\left\{(cos\,x)^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}(cos\,x)^{m-3}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots\ldots 2}(cos\,x)\right\}-$$

$$\frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots\ldots 1}(90^\circ-x),$$

quando m è pari. Potremo nel modo stesso trovare l'integrale di $dx\,(cos\,x)^m$, quando m è dispari. Osserviamo che l'ultimo termine

$-\frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots\ldots 1}(90^\circ-x)$ si può anche ridurre ad $\frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots\ldots 1}x$, risguardando la quantità $-\frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots\ldots 1}90^\circ$ come contenuta entro la costante arbitraria C.

Facciamo ora $m = 0, 1, 2, 3, 4$, ecc., e le formole superiori ci danno

$$\int dx\,(sen\,x)^0 = x$$

$$\int dx\,(sen\,x) = -\cos x$$

$$\int dx\,(sen\,x)^2 = -\frac{1}{2}\,sen\,x \cdot \cos x + \frac{1}{2}\,x$$

$$\int dx\,(sen\,x)^3 = -\frac{1}{3}\,(sen\,x)^2 \cdot \cos x - \frac{2}{3}\cos x \cdot \text{ecc.}$$

$$\int dx\,(\cos x)^0 = x$$

$$\int dx\,(\cos x) = sen\,x$$

$$\int dx\,(\cos x)^2 = \frac{1}{2}\,sen\,x\,\cos x + \frac{1}{2}\,x$$

$$\int dx\,(\cos x)^3 = \frac{1}{3}\,sen\,x\,(\cos x)^2 + \frac{2}{3}\,sen\,x \cdot \text{ecc.}$$

§ 148. Il differenziale $dx\,(sen\,x)^m\,(\cos x)^n$ può ancor esso integrarsi: in fatti si ha

$$\int dx\,(sen\,x)^m\,(\cos x)^n = \int (\cos x)^{n-1}\,dx\,(sen\,x)^m \cos x$$

$$= \frac{1}{m+1}\,(sen\,x)^{m+1}\,(\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1}\int dx\,(sen\,x)^{m+2} \cdot (\cos x)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{m+1}\,(sen\,x)^{m+1}\,(\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \cdot \int dx\,(sen\,x)^m\,(\cos x)^{n-2}\,\{1 - (\cos x)^2\},$$

e quindi

$$\int dx\,(sen\,x)^m \cdot (\cos x)^n = \frac{1}{m+n}\,(sen\,x)^{m+1}\,(\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n}\int dx\,(sen\,x)^m\,(\cos x)^{n-2},$$

e così l' integrazione di quel differenziale dipende da un altro, nel quale il coseno è elevato ad una potenza minore di due unità. Se continueremo pertanto questa riduzione, giungeremo ad una formola nella quale quando m ed n sono numeri intieri e positivi, $\cos x$ mancherà affatto, o vi sarà elevato alla prima potenza; giungeremo, cioè, a $\int dx (\operatorname{sen} x)^m$, ovvero $\int dx (\operatorname{sen} x)^m \cos x = \frac{1}{m+1} (\operatorname{sen} x)^{m+1}$.

§ 149. Potremo anche avere una formola generale che esprima il ricercato integrale, e questa si vedrà senza gran difficoltà che è

$$\int dx (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^n = \frac{1}{m+n} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n-3} + \ldots$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} (\operatorname{sen} x)^{m+1} \cos x$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} \int dx (\operatorname{sen} x)^m + C$$

per n pari; e

$$\int dx (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^n = \frac{1}{m+n} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n-3} + \ldots$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{m+1}$$

$$+ C \qquad \text{per } n \text{ dispari.}$$

Rispetto a ciò che abbiamo detto e a quel che siamo per dire, si osservi che se le formole differenziali in vece di contenere dx, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$,

contenessero $d\phi$, *sen* ϕ e *cos* ϕ, essendo ϕ una qualunque funzione dell' x, i loro integrali sarebbero espressi dalle stesse formole, purchè ponessimo *sen* ϕ, *cos* ϕ in vece di *sen* x, *cos* x e ϕ in vece dell' x.

§ 150. Supponendo che n sia un numero intiero e positivo, prendo a trattare le due formole

$\int x^n dx \operatorname{sen} x$; $\int x^n dx \cos x$. Ora

$$\int x^n dx \operatorname{sen} x = - x^n \cos x + \int n x^{n-1} dx \cos x$$

$$\int x^n dx \cos x = x^n \operatorname{sen} x - \int n x^{n-1} dx \operatorname{sen} x, \text{ quindi}$$

$$\int x^n dx \operatorname{sen} x = - x^n \cos x + n x^{n-1} \operatorname{sen} x - n(n-1) \times \int x^{n-2} dx \operatorname{sen} x:$$

se poniamo in quest' equazione $n-2$ in vece di n, facendo le successive sostituzioni, avremo

$$\int x^n dx \operatorname{sen} x = - x^n \cos x + n x^{n-1} \operatorname{sen} x + n(n-1) x^{n-2} \times \cos x - n(n-1)(n-2) x^{n-3} \operatorname{sen} x + \text{ecc.} + C:$$

questa serie è composta di un numero finito di termini. Nella stessa maniera troveremo

$$\int x^n dx \cos x = x^n \operatorname{sen} x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) x^{n-2} \times \operatorname{sen} x - n(n-1)(n-2) x^{n-3} \cos x + \text{ecc.} + C':$$

Possono ancora ottenersi gl' integrali dei due differenziali $x^n (\operatorname{sen} x)^m dx$, $x^n (\cos x)^m dx$: in fatti per mezzo dell' integrazione a parti possiamo far sì che questi dipendano dall' integrazione di termini di questa forma $dx (\operatorname{sen} x)^l (\cos x)^k$, i quali sappiamo come s' integrino. Imperciocchè facendo

$\int (\operatorname{sen} x)^m dx = p$, $\int p dx = q$, ecc., si ha

$$\int x^n (\operatorname{sen} x)^m dx = x^n p - n \int x^{n-1} p dx = x^n p - n x^{n-1} q + n(n-1) \int x^{n-2} q dx = \text{ecc.} = x^n p - n x^{n-1} q + \ldots$$

$+ n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \int V dx$, e nell' integrare pdx, qdx ecc., vdx non incontransi che termini di questa sorte $Adx\,(sen\,x)^l \cdot (cos\,x)^k$, essendo A un coefficiente costante. Per esempio $\int x^2 dx\,(sen\,x)^2 = x^2 p - \int 2x dx \cdot p$, essendo $p = \int dx\,(sen\,x)^2$: ora

$$\int dx\,(sen\,x)^2 = \frac{x - sen\,x\,cos\,x}{2}\text{; dunque}$$

$$\int x^2 dx\,(sen\,x)^2 = x^2 \left\{\frac{x - sen\,x\,cos\,x}{2}\right\} -$$

$$- \int x dx \{x - sen\,x\,cos\,x\} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2\,sen\,x\,cos\,x}{2}$$

$+ \int x dx\,cos\,x\,sen\,x$: ma si trova

$$\int x dx\,cos\,x\,sen\,x = \frac{x\,(sen\,x)^2}{2} - \int \frac{(sen\,x)^2\,dx}{2}$$

$$= \frac{x\,(sen\,x)^2}{2} + \frac{sen\,x\,cos\,x}{4} - \frac{x}{4}\text{; dunque il ri-}$$

cercato integrale sarà

$$\int x^2 dx\,(sen\,x)^2 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2\,sen\,x\,cos\,x}{2} + \frac{x\,(sen\,x)^2}{2}$$

$$+ \frac{sen\,x\,cos\,x}{4} - \frac{x}{4}.$$

§ 151. Andiamo a trattare dell' integrazione di quelle formole nelle quali i seni e coseni sono elevati a potenze negative.

Le più semplici di queste formole sono $\frac{dx}{sen\,x}$, $\frac{dx}{cos\,x}$, $\frac{dx\,cos\,x}{sen\,x}$, $\frac{dx\,sen\,x}{cos\,x}$: rispetto alla prima, se noi facciamo $cos\,x = y$, ed osserviamo che

$$\frac{dx}{sen\,x} = \frac{dx\,sen\,x}{(sen\,x)^2} = \frac{dx\,sen\,x}{1 - (cos\,x)^2} = -\frac{dy}{1 - y^2}\text{, avremo}$$

$$\int \frac{dx}{sen\,x} = -\int \frac{dy}{1 - y^2} = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{1 + y}{1 - y}\text{, e quindi}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Per la seconda, fatto $\operatorname{sen} x = y$, si ha

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}:$$

gl' integrali poi della terza e della quarta dipendono dai logaritmi, e si ha

$$\int \frac{dx \cos x}{\operatorname{sen} x} = l \operatorname{sen} x = \int \frac{dx}{\operatorname{tang} x} = \int dx \cot x$$

$$\int \frac{dx \operatorname{sen} x}{\cos x} = -l \cos x = \int dx \operatorname{tang} x.$$

Questi due ultimi integrali ci danno

$$\int \frac{dx \cos x}{\operatorname{sen} x} + \int \frac{dx \operatorname{sen} x}{\cos x} = \int \frac{dx \{(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2\}}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen} x} = l \operatorname{sen} x - l \cos x = l\, \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = l \operatorname{tang} x.$$

Agl' integrali poi delle due prime formole può darsi altra forma, cioè

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos x}{1-\cos x} = l\, \frac{\sqrt{(1-\cos x)}}{\sqrt{(1+\cos x)}} = l \operatorname{tang} \frac{1}{2} x$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = l\, \frac{\sqrt{(1+\operatorname{sen} x)}}{\sqrt{(1-\operatorname{sen} x)}}$$

$$= l \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} x\right).$$

§ 152. Per integrare $\dfrac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{\cos x}$, osserviamo che

$\dfrac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{\cos x} = \dfrac{(\operatorname{sen} x)^{m-1}}{\cos x}\, dx \operatorname{sen} x$, ed avremo, integrando a parti,

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{\cos x} = -(sen\,x)^{m-1} + \int \cos x \cdot d\left(\frac{(sen\,x)^{m-1}}{\cos x}\right)$$

$$= -(sen\,x)^{m-1} + (m-1)\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{\cos x}$$

$$-(m-2)\cdot\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{\cos x}, \text{ e quindi}$$

$$(1)\ldots\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{\cos x} = -\frac{1}{m-1}(sen\,x)^{m-1}$$

$$+\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{\cos x}.$$

Se in quest' ultima equazione poniamo $m-2$ in vece di m, avremo

$$(2)\ldots\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{\cos x} = -\frac{1}{m-3}(sen\,x)^{m-3}$$

$$+\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-4}}{\cos x},$$

e sostituendo l'equazione (2) nella (1), il cercato integrale dipenderà allora dalla formola $\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-4}}{\cos x}$: continuando lo stesso raziocinio, vedremo che quando m sarà caffo, si avrà

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{\cos x} = -\frac{1}{m-1}(sen\,x)^{m-1} - \frac{1}{m-3}(sen\,x)^{m-3}$$

$$-\ldots - \frac{1}{2}\,sen\,x^2 - l\cos x; \text{ e quando } m \text{ è pari},$$

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{\cos x} = -\frac{(sen\,x)^{m-1}}{m-1} - \frac{(sen\,x)^{m-3}}{m-3} - \ldots$$

$$-\frac{1}{1}\,sen\,x + l\,tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}x\right).$$

Se poniamo $y = 90° - x$, avremo ancora il valore di $\int \frac{dx(\cos x)^m}{\operatorname{sen} x}$, poichè questo è $= -\int \frac{dy(\operatorname{sen} y)^m}{\cos y}$.

§ 153. Al § 148 noi abbiamo fatta questa riduzione

$$\int dx (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^n = \frac{1}{m+n} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n} \int dx (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^{n-2}$$: poniamo in essa $-n$ in vece di n, ed avremo

$$\int \frac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n} = \frac{1}{m-n} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n+1}} - \frac{n+1}{m-n} \int \frac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^{n+2}},$$

dalla quale, ponendo $n-2$ in vece di n, possiamo ricavare

$$\int \frac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^{n-2}}.$$

Quest' ultima equazione ci darà

$$\int \frac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n-1}} + \frac{n-m-2}{(n-1)(n-3)} \times$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n-3}} + \ldots + \frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots(2-m)}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1} \times$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{\cos x} + \frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots(2-m)}{(n-1)(n-3)\ldots 1} \int dx (\operatorname{sen} x)^m,$$

pel caso di n pari; e quando è caffo

$$\int \frac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n-1}} + \frac{n-m-2}{(n-1)(n-3)} \times$$

$$\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{n-3}}+\ldots+\frac{(n-m-2)\,(n-m-4)\ldots(3-m)}{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)\ldots2}\times$$

$$\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{2}}+\frac{(n-m-2)\,(n-m-4)\ldots(1-m)}{(n-1)\,(n-3)\ldots2}\int\frac{dx\,sen\,x^{m}}{cos\,x}.$$

Facciamo in queste due equazioni $m=-1$, e s' avrà

$$\int\frac{dx}{sen\,x(cos\,x)^{n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-1}}+\frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-3}}+$$

$$\ldots+\frac{1}{cos\,x}+\int\frac{dx}{sen\,x}$$ quando n è pari; e quando è caffo

$$\int\frac{dx}{sen\,x\,(cos\,x)^{n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-1}}+\frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-3}}+$$

$$\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{2}}+\int\frac{dx}{sen\,x\,cos\,x}.$$

Nelle medesime equazioni poniamo $-m$ in vece di m, ed avremo per n pari

$$\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}\,(cos\,x)^{n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}\,(cos\,x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n+m-2}{(n-1)\,(n-3)}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}\,(cos\,x)^{n-3}}+\ldots$$

$$+\frac{(n+m-2)\,(n+m-4)\ldots(2+m)}{(n-1)\,(n-3)\ldots1}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}\,cos\,x}$$

$$+\frac{(n+m-2)\,(n+m-4)\ldots m}{(n-1)\,(n-3)\ldots1}\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}};$$

e per n caffo

$$\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}\,(cos\,x)^{n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}\,(cos\,x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n+m-2}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}(cos\,x)^{n-3}}+\ldots.$$

$$+\frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(3+m)}{(n-1)(n-3)\ldots 2}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}(cos\,x)^{2}}$$

$$+\frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(1+m)}{(n-1)(n-3)\ldots 2}\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}\,cos\,x}.$$

L' integrale $\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}\,cos\,x}$ è conosciuto, poichè facendo $x=90^{\circ}-y$, si ha

$\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}\,cos\,x}=-\int\frac{dy}{sen\,y\,(cos\,y)^{m}}$, della quale abbiamo qui sopra trovato il valore.

L' integrale poi di $\frac{dx}{(sen\,x)^{m}}$, che dipende dall' integrale di $\frac{dy}{(cos\,y)^{m}}$, si ricava dalla formola data per $\int\cdot\frac{dx\,(sen\,x)^{m}}{(cos\,x)^{n}}$, facendovi $m=0$, e cangiando n in m.

§ 154. Terminiamo questo capo col prendere ad integrare la formola $\frac{d\phi\,(h+k\,cos\,\phi)}{a+b\,cos\,\phi}$.

A tal fine io osservo che

$\frac{d\phi\cdot cos\,\phi}{a+b\,cos\,\phi}=\frac{d\phi}{b}-\frac{ad\phi}{b\,(a+b\,cos\,\phi)}$; dunque

$$\int\frac{d\phi\,(h+k\,cos\,\phi)}{a+b\,ccs\,\phi}=\int\frac{hd\phi}{a+b\,cos\,\phi}+\frac{\phi k}{b}-\int\frac{akd\phi}{b(a+b\,cos\phi)}$$

$=\frac{k\phi}{b}+\frac{hb-ak}{b}\int\frac{d\phi}{a+b\,cos\,\phi}$, e così l' integrazione è

$$+\frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}(sen\ x)^{m-5}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 2}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 1}\Big\}.$$

§ 147. Per integrare la seconda formola $dx(cos\ x)^m$, facciamo $x=90^\circ-y$, ed avremo

$$\int dx\,(cos\ x)^m=-\int dy\,(sen\ y)^m=-C+$$

$$\frac{cos\ y}{m}\Big\{(sen\ y)^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}(sen\ y)^{m-3}+\ldots$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 2}\,sen\ y\Big\}-$$

$$\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 2}\,y=-C$$

$$+\frac{sen\ x}{m}\Big\{(cos\ x)^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}(cos\ x)^{m-3}+\ldots$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots 2}(cos\ x)\Big\}-$$

$$\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots 1}(90^\circ-x),$$

quando m è pari. Potremo nel modo stesso trovare l' integrale di $dx\,(cos\ x)^m$, quando m è dispari. Osserviamo che l' ultimo termine

$-\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots 1}(90^\circ-x)$ si può anche ridurre ad $\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots 1}x$, risguardando la quantità $-\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots 1}90^\circ$ come contenuta entro la costante arbitraria C.

Facciamo ora $m = 0, 1, 2, 3, 4$, ecc., e le formole superiori ci danno

$$\int dx\,(sen\,x)^0 = x$$

$$\int dx\,(sen\,x) = -\cos x$$

$$\int dx\,(sen\,x)^2 = -\frac{1}{2}\,sen\,x \cdot \cos x + \frac{1}{2}\,x$$

$$\int dx\,(sen\,x)^3 = -\frac{1}{3}\,(sen\,x)^2 \cdot \cos x - \frac{2}{3}\,\cos x \cdot \text{ecc.}$$

$$\int dx\,(\cos x)^0 = x$$

$$\int dx\,(\cos x) = sen\,x$$

$$\int dx\,(\cos x)^2 = \frac{1}{2}\,sen\,x\,\cos x + \frac{1}{2}\,x$$

$$\int dx\,(\cos x)^3 = \frac{1}{3}\,sen\,x\,(\cos x)^2 + \frac{2}{3}\,sen\,x \cdot \text{ecc.}$$

§ 148. Il differenziale $dx\,(sen\,x)^m\,(\cos x)^n$ può ancor esso integrarsi: in fatti si ha

$$\int dx\,(sen\,x)^m\,(\cos x)^n = \int (\cos x)^{n-1}\,dx\,(sen\,x)^m \cos x$$

$$= \frac{1}{m+1}\,(sen\,x)^{m+1}\,(\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1}\int dx\,(sen\,x)^{m+2} \cdot (\cos x)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{m+1}\,(sen\,x)^{m+1}\,(\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \cdot \int dx\,(sen\,x)^m\,(\cos x)^{n-2}\,\{1 - (\cos x)^2\},$$

e quindi

$$\int dx\,(sen\,x)^m \cdot (\cos x)^n = \frac{1}{m+n}\,(sen\,x)^{m+1}\,(\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n}\int dx\,(sen\,x)^m\,(\cos x)^{n-2},$$

e così l' integrazione di quel differenziale dipende da un altro, nel quale il coseno è elevato ad una potenza minore di due unità. Se continueremo pertanto questa riduzione, giungeremo ad una formola nella quale quando m ed n sono numeri intieri e positivi, $\cos x$ mancherà affatto, o vi sarà elevato alla prima potenza; giungeremo, cioè, a $\int dx (\operatorname{sen} x)^m$, ovvero $\int dx (\operatorname{sen} x)^m \cos x = \frac{1}{m+1} (\operatorname{sen} x)^{m+1}$.

§ 149. Potremo anche avere una formola generale che esprima il ricercato integrale, e questa si vedrà senza gran difficoltà che è

$$\int dx\, (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^n = \frac{1}{m+n} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n-3} + \ldots$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} (\operatorname{sen} x)^{m+1} \cos x$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} \int dx\, (\operatorname{sen} x)^m + C$$

per n pari; e

$$\int dx (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^n = \frac{1}{m+n} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n-3} + \ldots$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4 \cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{m+1}$$

$+ C$ per n dispari.

Rispetto a ciò che abbiamo detto e a quel che siamo per dire, si osservi che se le formole differenziali in vece di contenere dx, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$,

contenessero $d\phi$, *sen* ϕ e *cos* ϕ, essendo ϕ una qualunque funzione dell' x, i loro integrali sarebbero espressi dalle stesse formole, purchè ponessimo *sen* ϕ, *cos* ϕ in vece di *sen* x, *cos* x e ϕ in vece dell' x.

§ 150. Supponendo che n sia un numero intiero e positivo, prendo a trattare le due formole

$\int x^n dx \, sen\, x$; $\int x^n dx \cos x$. Ora

$$\int x^n dx \, sen\, x = - x^n \cos x + \int n x^{n-1} dx \cos x$$

$$\int x^n dx \cos x = x^n \, sen\, x - \int n x^{n-1} dx \, sen\, x \text{ , quindi}$$

$$\int x^n dx \, sen\, x = - x^n \cos x + n x^{n-1} \, sen\, x - n(n-1) \times \int x^{n-2} dx \, sen\, x :$$

se poniamo in quest' equazione $n - 2$ in vece di n, facendo le successive sostituzioni, avremo

$$\int x^n dx \, sen\, x = - x^n \cos x + n x^{n-1} \, sen\, x + n(n-1) x^{n-2} \times \cos x - n(n-1)(n-2) x^{n-3} \, sen\, x + \text{ecc.} + C :$$

questa serie è composta di un numero finito di termini. Nella stessa maniera troveremo

$$\int x^n dx \cos x = x^n \, sen\, x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) x^{n-2} \times sen\, x - n(n-1)(n-2) x^{n-3} \cos x + \text{ecc.} + C' :$$

Possono ancora ottenersi gl' integrali dei due differenziali $x^n (sen\, x)^m dx$, $x^n (\cos x)^m dx$: in fatti per mezzo dell' integrazione a parti possiamo far sì che questi dipendano dall' integrazione di termini di questa forma $dx\,(sen\, x)^l (\cos x)^k$, i quali sappiamo come s' integrino. Imperciocchè facendo

$\int (sen\, x)^m dx = p$, $\int p dx = q$, ecc., si ha

$$\int x^n (sen\, x)^m dx = x^n p - n \int x^{n-1} p dx = x^n p - n x^{n-1} q + n(n-1) \int x^{n-2} q dx = \text{ecc.} = x^n p - n x^{n-1} q + \ldots$$

$+ n(n-1)\ldots 2\cdot 1 \int V dx$, e nell' integrare pdx, qdx ecc., vdx non incontransi che termini di questa sorte $Adx\,(sen\,x)^l\cdot(cos\,x)^k$, essendo A un coefficiente costante. Per esempio $\int x^2 dx\,(sen\,x)^2 = x^2 p - \int 2x dx\cdot p$, essendo $p = \int dx\,(sen\,x)^2$: ora

$$\int dx\,(sen\,x)^2 = \frac{x - sen\,x\,cos\,x}{2}; \text{ dunque}$$

$$\int x^2 dx\,(sen\,x)^2 = x^2\left\{\frac{x - sen\,x\,cos\,x}{2}\right\} -$$

$$- \int x dx\{x - sen\,x\,cos\,x\} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2\,sen\,x\,cos\,x}{2}$$

$$+ \int x dx\,cos\,x\,sen\,x : \text{ ma si trova}$$

$$\int x dx\,cos\,x\,sen\,x = \frac{x\,(sen\,x)^2}{2} - \int\frac{(sen\,x)^2 dx}{2}$$

$$= \frac{x\,(sen\,x)^2}{2} + \frac{sen\,x\,cos\,x}{4} - \frac{x}{4}; \text{ dunque il ri-}$$

cercato integrale sarà

$$\int x^2 dx\,(sen\,x)^2 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2\,sen\,x\,cos\,x}{2} + \frac{x\,(sen\,x)^2}{2}$$

$$+ \frac{sen\,x\,cos\,x}{4} - \frac{x}{4}.$$

§ 151. Andiamo a trattare dell' integrazione di quelle formole nelle quali i seni e coseni sono elevati a potenze negative.

Le più semplici di queste formole sono

$\frac{dx}{sen\,x}$, $\frac{dx}{cos\,x}$, $\frac{dx\,cos\,x}{sen\,x}$, $\frac{dx\,sen\,x}{cos\,x}$: rispetto alla prima, se noi facciamo $cos\,x = y$, ed osserviamo che

$$\frac{dx}{sen\,x} = \frac{dx\,sen\,x}{(sen\,x)^2} = \frac{dx\,sen\,x}{1-(cos\,x)^2} = -\frac{dy}{1-y^2}, \text{ avremo}$$

$$\int\frac{dx}{sen\,x} = -\int\frac{dy}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+y}{1-y}, \text{ e quindi}$$

$$\int \frac{dx}{sen\,x} = -\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Per la seconda, fatto $sen\,x = y$, si ha

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}:$$

gl' integrali poi della terza e della quarta dipendono dai logaritmi, e si ha

$$\int \frac{dx \cos x}{sen\,x} = l\, sen\,x = \int \frac{dx}{tang\,x} = \int dx \cot x$$

$$\int \frac{dx\, sen\,x}{\cos x} = -l \cos x = \int dx\, tang\,x.$$

Questi due ultimi integrali ci danno

$$\int \frac{dx \cos x}{sen\,x} + \int \frac{dx\, sen\,x}{\cos x} = \int \frac{dx \{ (\cos x)^2 + (sen\,x)^2 \}}{sen\,x \cos x}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x\, sen\,x} = l\, sen\,x - l \cos x = l\, \frac{sen\,x}{\cos x} = l\, tang\,x.$$

Agl' integrali poi delle due prime formole può darsi altra forma, cioè

$$\int \frac{dx}{sen\,x} = -\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos x}{1-\cos x} = l\, \frac{\sqrt{(1-\cos x)}}{\sqrt{(1+\cos x)}} = l\, tang\, \frac{1}{2} x$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+sen\,x}{1-sen\,x} = l\, \frac{\sqrt{(1+sen\,x)}}{\sqrt{(1-sen\,x)}}$$

$$= l\, tang\, (45^\circ + \frac{1}{2} x).$$

§ 152. Per integrare $\frac{dx\, (sen\,x)^m}{\cos x}$, osserviamo che

$\frac{dx\, (sen\,x)^m}{\cos x} = \frac{(sen\,x)^{m-1}}{\cos x}\, dx\, sen\,x$, ed avremo, integrando a parti,

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = -(sen\,x)^{m-1} + \int cos\,x \cdot d\left(\frac{(sen\,x)^{m-1}}{cos\,x}\right)$$

$$= -(sen\,x)^{m-1} + (m-1)\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{cos\,x}$$

$$-(m-2)\cdot\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x}, \text{ e quindi}$$

$$(1)\ldots\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = -\frac{1}{m-1}(sen\,x)^{m-1} + \int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{cos\,x}.$$

Se in quest' ultima equazione poniamo $m-2$ in vece di m, avremo

$$(2)\ldots\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{cos\,x} = -\frac{1}{m-3}(sen\,x)^{m-3} + \int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-4}}{cos\,x},$$

e sostituendo l'equazione (2) nella (1), il cercato integrale dipenderà allora dalla formola $\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-4}}{cos\,x}$: continuando lo stesso raziocinio, vedremo che quando m sarà caffo, si avrà

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = -\frac{1}{m-1}(sen\,x)^{m-1} - \frac{1}{m-3}(sen\,x)^{m-3}$$

$$-\ldots-\frac{1}{2}\,sen\,x^2 - l\,cos\,x; \text{ e quando } m \text{ è pari,}$$

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = -\frac{(sen\,x)^{m-1}}{m-1} - \frac{(sen\,x)^{m-3}}{m-3} - \ldots$$

$$-\frac{1}{1}\,sen\,x + l\,tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}x\right).$$

Se poniamo $y = 90° - x$, avremo ancora il valore di $\int \frac{dx (\cos x)^m}{\operatorname{sen} x}$, poichè questo è $= -\int \frac{dy (\operatorname{sen} y)^m}{\cos y}$.

§ 153. Al § 148 noi abbiamo fatta questa riduzione

$$\int dx (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^n = \frac{1}{m+n} (\operatorname{sen} x)^{m+1} (\cos x)^{n+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n} \int dx (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^{n-2}:$$ poniamo in essa $-n$ in vece di n, ed avremo

$$\int \frac{dx (\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n} = \frac{1}{m-n} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n+1}} - \frac{n+1}{m-n} \int \frac{dx (\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^{n+2}},$$

dalla quale, ponendo $n-2$ in vece di n, possiamo ricavare

$$\int \frac{dx (\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{dx (\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^{n-2}}.$$

Quest' ultima equazione ci darà

$$\int \frac{dx (\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n-1}} + \frac{n-m-2}{(n-1)(n-3)} \times$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n-3}} + \ldots + \frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots(2-m)}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1} \times$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{\cos x} + \frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots(2-m)}{(n-1)(n-3)\ldots 1} \int dx (\operatorname{sen} x)^m,$$

pel caso di n pari; e quando è caffo

$$\int \frac{dx (\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^{m+1}}{(\cos x)^{n-1}} + \frac{n-m-2}{(n-1)(n-3)} \times$$

$$\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{n-3}}+\ldots+\frac{(n-m-2)\,(n-m-4)\ldots(3-m)}{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)\ldots 2}\times$$

$$\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{2}}+\frac{(n-m-2)\,(n-m-4)\ldots(1-m)}{(n-1)\,(n-3)\ldots 2}\int\frac{dx\,sen\,x^{m}}{cos\,x}.$$

Facciamo in queste due equazioni $m=-1$, e s' avrà

$$\int\frac{dx}{sen\,x(cos\,x)^{n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-1}}+\frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-3}}+$$

$$\ldots+\frac{1}{cos\,x}+\int\frac{dx}{sen\,x}$$ quando n è pari; e quando è caffo

$$\int\frac{dx}{sen\,x\,(cos\,x)^{n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-1}}+\frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-3}}+$$

$$\ldots\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{2}}+\int\frac{dx}{sen\,x\,cos\,x}.$$

Nelle medesime equazioni poniamo $-m$ in vece di m, ed avremo per n pari

$$\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}\,(cos\,x)^{n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}\,(cos\,x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n+m-2}{(n-1)\,(n-3)}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}\,(cos\,x)^{n-3}}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(n+m-2)\,(n+m-4)\ldots(2+m)}{(n-1)\,(n-3)\ldots 1}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}\,cos\,x}$$

$$+\frac{(n+m-2)\,(n+m-4)\ldots m}{(n-1)\,(n-3)\ldots 1}\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}};$$

e per n caffo

$$\int\frac{dx}{(sen\,x)^{m}\,(cos\,x)^{n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}\,(cos\,x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n+m-2}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}(cos\,x)^{n-3}}+\ldots.$$

$$+\frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(3+m)}{(n-1)(n-3)\ldots2}\cdot\frac{1}{(sen x)^{m-1}(cos\,x)^2}$$

$$+\frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(1+m)}{(n-1)(n-3)\ldots2}\int\frac{dx}{(sen\,x)^m\,cos\,x}.$$

L' integrale $\int\frac{dx}{(sen\,x)^m\,cos\,x}$ è conosciuto, poichè facendo $x=90^\circ-y$, si ha $\int\frac{dx}{(sen\,x)^m\,cos\,x}=-\int\frac{dy}{sen\,y\,(cos\,y)^m}$, della quale abbiamo qui sopra trovato il valore.

L' integrale poi di $\frac{dx}{(sen\,x)^m}$, che dipende dall' integrale di $\frac{dy}{(cos\,y)^m}$, si ricava dalla formola data per $\int\cdot\frac{dx\,(sen\,x)^m}{(cos\,x)^n}$, facendovi $m=0$, e cangiando n in m.

§ 154. Terminiamo questo capo col prendere ad integrare la formola $\frac{d\phi\,(h+k\,cos\,\phi)}{a+b\,cos\,\phi}$.

A tal fine io osservo che

$\frac{d\phi\cdot cos\,\phi}{a+b\,cos\,\phi}=\frac{d\phi}{b}-\frac{ad\phi}{b\,(a+b\,cos\,\phi)}$; dunque

$$\int\frac{d\phi\,(h+k\,cos\,\phi)}{a+b\,ccs\,\phi}=\int\frac{hd\phi}{a+b\,cos\,\phi}+\frac{\phi k}{b}-\int\frac{akd\phi}{b(a+b\,cos\phi)}$$

$=\frac{k\phi}{b}+\frac{hb-ak}{b}\int\frac{d\phi}{a+b\,cos\,\phi}$, e così l' integrazione è

ridotta a quella d'una formola più semplice $\int\frac{d\phi}{a+b\cos\phi}$.

Facciamo $\tang\frac{1}{2}\phi=t$, ed avremo $d\phi=\frac{2dt}{1+t^2}$; ma questa sostituzione ci dà $\sen\frac{1}{2}\phi=\frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$ e $\cos\frac{1}{2}\phi=\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$, da cui si ricava $\cos\phi=\frac{1-tt}{1+tt}$; dunque $a+b\cos\phi=\frac{a+b+(a-b)tt}{1+tt}$, e quindi

$$\int\frac{d\phi}{a+b\cos\phi}=\int\frac{2dt}{a+b+(a-b)tt}.$$

L' integrale di questa formola è un angolo o un logaritmo, secondo che il coefficiente di t^2 è positivo o negativo.

Nel primo caso si ha

$$\int\frac{d\phi}{a+b\cos\phi}=\frac{2}{\sqrt{(aa-bb)}}\text{Arc tang }t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$ essendo $t=\tang\frac{1}{2}\phi$.

Quest' integrale svanisce quando $\phi=0$. Volendo poi quest' integrale esteso dal termine $\phi=0$ sino a $\phi=180°$, ovvero $t=\infty$, si avrà

$$\int\frac{d\phi}{a+b\cos\phi}=\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\cdot\frac{\pi}{2},$$ essendo π la semiperiferia pel raggio 1.

CAPO IV.

Integrazione delle differenziali per mezzo delle serie.

§ 155. Quando non si può avere un integrale espresso per un numero finito di termini, si tenta di averlo per mezzo delle serie; e se le serie sono convergenti, gl' integrali hanno talvolta un pregio anche

maggiore di quello che avrebbero se fossero rappresentati da espressioni assai complicate, per quanto queste ne esprimessero il valore esatto, mentre le serie convergenti lo danno sempre approssimato.

Sia dunque da integrarsi il differenziale Xdx, ove X è una funzione dell' x. Sviluppiamo x in una serie ordinata secondo le potenze dell' x: questa è

$$X = A + \left(\frac{dX}{dx}\right) x + \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) \frac{x^2}{2} + \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \text{ecc.},$$

ove A debb' essere il valore di X quando $x = 0$; ed ove nei coefficienti differenziali conviene fare $x = 0$ a differenziazioni eseguite: avremo pertanto

$$\int Xdx = Ax + \left(\frac{dX}{dx}\right) \frac{x^2}{2} + \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + C,$$

rappresentando con C la costante arbitraria che si aggiunge integrando.

Generalmente parlando, qualunque sia la serie nella quale si svolge X, per esempio, sia

$$X = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + ex^{m+3n} + \text{ecc.}, \text{ avremo}$$

$$\int Xdx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{cx^{m+2n+1}}{m+2n+1}$$
$$+ \frac{ex^{m+3n+1}}{m+3n+1} + \text{ecc.} + C,$$

essendo C la costante arbitraria aggiunta integrando.

Onde fare alcuni esempj di questo metodo, proponiamoci d' integrare il differenziale $\frac{adx}{a^2 + x^2}$.

Essendo $\frac{a}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \frac{x^8}{a^9} - \text{ecc.}$,

avremo $\int \frac{adx}{a^2 + x^2} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{ecc.} + C$:

ma $\int \frac{adx}{a^2 + x^2} = Arc.\ tang\ \frac{x}{a}$; dunque

$$Arc.\ tang\ \frac{x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{ecc.} + C:$$

Ora essendo $Arc.\ tang\ \frac{x}{a} = 0$ quando $x = 0$, s'avrà $C = 0$. Facciamo $x = a$, ed allora sarà

$$Arc.\ tang\ 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ecc.} = Arc.\ \text{di}\ 45°;$$

questa formola potrebbe servire per la rettificazione del cerchio, ma converge pochissimo.

Per integrare $\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, io osservo che

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 + \text{ecc.};\ \text{dunque}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \text{ecc.}$$

Ma $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = Arc.\ sen\ x$; dunque

$$Arc.\ sen\ x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7}$$

$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \text{ecc.}$, facciamo $x = 1$, ed avremo

$$Arc.\ 90° = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$$

$+$ ecc.; e se poniamo $x = \frac{1}{2}$, s'avrà

$$Arc.\, 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2^5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^7 \cdot 7}$$

+ ecc. serie convergentissima, e perciò atta ad esprimere il rapporto della circonferenza al diametro.

§ 156. Integriamo colle serie la formola irrazionale $x^{m-1}\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$. Essendo

$$\left(1 + \frac{b}{a} x^n\right)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{pb}{qa} x^n + \frac{p(p-q)\, b^2}{q \cdot 2q \cdot a^2} x^{2n}$$

$$+ \frac{p(p-q)(p-2q)\, b^3}{q \cdot 2q \cdot 3q \cdot a^3} x^{3n} + \text{ecc.},$$

avremo (rappresentando con y l' integrale cercato)

$$y = a^{\frac{p}{q}} \left\{ \frac{x^m}{m} + \frac{pb}{q \cdot a} \cdot \frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{p(p-q)\, b^2}{q \cdot 2q \cdot a^2} \cdot \frac{x^{m+2n}}{m+2n} \right.$$

$$\left. + \frac{p(p-q)(p-2q)\, b^3}{p \cdot 2q \cdot 3q \cdot a^3} \cdot \frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \text{ecc.} \right\},$$

e questa serie va all' infinito se $\frac{p}{q}$ non è un numero intiero e positivo.

Se la quantità a sarà negativa, e nel tempo stesso sarà q un numero pari, la nostra serie conterrà l' immaginario $\sqrt{(-a)}$, onde per ottenere un integrale che ne sia privo, cangeremo la formola

$x^{m-1}\, dx\, (bx^n - a)^{\frac{p}{q}}$ nell' altra

$b^{\frac{p}{q}}\, x^{m + \frac{pn}{q} - 1}\, dx \left(1 - \frac{a}{b} x^{-n}\right)^{\frac{p}{q}}$: essendo allora

$$\left(1 - \frac{a}{b} x^{-n}\right)^{\frac{p}{q}} = 1 - \frac{pa}{qb} x^{-n} + \frac{p(p-q)\, a^2}{q \cdot 2q \cdot b^2} x^{-2n}$$

$-\frac{p(p-q)(p-2q)a^3}{q\cdot 2q\cdot 3q\cdot b^3}x^{-3n}+$ ecc., s'avrà integrando

$$y=b^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{qx^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np}-\frac{pa}{qb}\cdot\frac{qx^{m+\frac{(p-q)}{q}n}}{mq+(p-q)n}+\right.$$

$$\left.\frac{p(p-q)a^2}{q\cdot 2q\cdot b^2}\cdot\frac{qx^{m+\frac{(p-2q)}{q}n}}{mq+(p-2q)n}-\text{ecc.}\right\}.$$

Possiamo poi far uso di ambedue le serie se a e b saranno ambedue numeri positivi.

§ 157. Per integrare il differenziale $dx\sqrt{\frac{(1+ax^2)}{1-x^2}}$, piuttosto che sviluppare in serie secondo le potenze dell' x la quantità $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}}$, prendiamo lo svilup-po di $\sqrt{(1+ax^2)}$, e siccome questo è

$$\sqrt{(1+ax^2)}=1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}a^2x^4+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}a^3x^6-\text{ec.},$$

avremo

$$\int dx\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}}=\int\left\{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}a^2x^4+\text{ec}\right\}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Ora supponiamo che l'integrale debba prendersi da $x=0$ sino ad $x=1$, e si avrà

$$\int dx\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}a-\frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}a^2\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}a^3-\text{ecc.}\right\}:$$

questa formola può servire per la rettificazione del-l'elisse, come vedremo a suo luogo.

§ 158. Per avere l'integrale di $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, osservo che

$$(1-x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^8+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^{12}+\text{ecc.},$$

dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=x+\frac{1}{2\cdot5}x^5+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot9}x^9+$$
$$\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot13}x^{13}+\text{ecc.}+C:$$

Se noi indichiamo con A quest' integrale preso da $x=0$ sino ad $x=1$, s' avrà

$$A=1+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot9}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot13}+\text{ecc.}$$

Per un altro verso

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\times$$
$$\left\{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\text{ecc.}\right\},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}+\text{ecc.}$$

Se si prendono quest' integrali in modo che svaniscano quando $x=0$, e vi si fa $x=1$, le formole del (§ 139) ci daranno

$$A=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\text{ecc.}\right\};$$

sarà pertanto

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot9}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot13}+\text{ecc.}}{1-\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\text{ecc.}}$$

Formola elegante per esprimere il rapporto del diametro alla circonferenza.

§ 159. Cerchiamo l'integrale di $\frac{d\phi}{1 + n \cos \phi}$ espresso per serie ordinata secondo i seni degli angoli multipli. Per questo osservo che

$$\frac{1}{1 + n \cos \phi} = 1 - n \cos \phi + n^2 (\cos \phi)^2 - n^3 (\cos \phi)^3 + n^4 (\cos \phi)^4 - \text{ecc.}$$

Ma dall' introduzione al calcolo sublime si ha

$$(\cos \phi)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi ;$$

$$(\cos \phi)^3 = \frac{3}{4} \cos \phi + \frac{1}{4} \cos 3\phi ;$$

$$(\cos \phi)^4 = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \cos 2\phi + \frac{1}{8} \cos 4\phi ;$$

$$(\cos \phi)^5 = \frac{10}{16} \cos \phi + \frac{5}{16} \cos 3\phi + \frac{1}{16} \cos 5\phi ;$$

ecc. ecc.

dunque sostituendo, sarà

$$\frac{1}{1 + n \cos \phi} = 1 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{8} n^4 + \frac{10}{32} n^6 + \frac{35}{128} n^8 + \text{ec.}$$
$$- B \cos \phi + C \cos 2\phi - D \cos 3\phi + E \cos 4\phi - \text{ecc.},$$

ove $-B$, $+C$, $-D$, ecc. rappresentano i coefficienti che nascerebbero da quelle sostituzioni, e dei quali ora troveremo i valori.

È la serie $1 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{8} n^4 + \frac{10}{32} n^6 + \text{ecc.} =$ $\frac{1}{\sqrt{(1 - n^2)}}$: indichiamola con A, e si avrà

$$\frac{1}{1 + n \cos \phi} = A - B \cos \phi + C \cos 2\phi - D \cos 3\phi + \text{ecc.}$$

Moltiplichiamo questa equazione per $1 + n \cos\phi$, e poichè

$$\cos\phi \cos m\phi = \frac{1}{2}\cos(m-1)\phi + \frac{1}{2}\cos(m+1)\phi,$$

avremo

$$1 = A - B\cos\phi + C\cos 2\phi - D\cos 3\phi \text{ ec.}$$
$$-\frac{1}{2}Bn + An\cos\phi - \frac{1}{2}Bn\cos 2\phi + \frac{1}{2}Cn\cos 3\phi \text{ ec.}$$
$$+\frac{1}{2}Cn\cos\phi - \frac{1}{2}Dn\cos 2\phi + \frac{1}{2}En\cos 3\phi,$$

e per conseguenza

$$B = \frac{2}{n}(A-1), \quad C = \frac{2B - 2An}{n}, \quad D = \frac{2C - Bn}{n},$$

$$E = \frac{2D - Cn}{n}, \quad F = \frac{2E - Dn}{n}, \text{ ecc.}$$

Trovati questi coefficienti, avremo facilmente l' integrale $\int \frac{d\phi}{1 + n\cos\phi}$; imperocchè essendo

$\int d\phi \cdot \cos m\phi = \frac{1}{m} sen\, m\phi$, si avrà $\int \frac{d\phi}{1 + n\cos\phi} = A\phi$
$- B\, sen\,\phi + \frac{1}{2}C\, sen\, 2\phi - \frac{1}{3}D\, sen\, 3\phi + \frac{1}{4}E\, sen\, 4\phi$
— ecc., serie che cammina secondo i seni degli angoli ϕ, 2ϕ, 3ϕ ecc. Osserviamo che se $n > 1$, tutti i coefficienti A, B, C, ecc. divengono immaginarj, e quindi non può allora esser buona la nostra integrazione. Se $n = 1$, essendo

$1 + \cos\phi = 2\cos\frac{1}{2}\phi^2$, si avrà

$$\int \frac{d\phi}{1 + n\cos\phi} = \int \frac{\frac{1}{2}d\phi}{\cos\frac{1}{2}\phi^2} = tang\,\frac{1}{2}\phi.$$

§ 160. La regola d' integrazione a parti ci dà una formola generalissima per esprimere gl'integrali colle serie; sia in fatti $dy = Xdx$, e si avrà

$$y = Xx - \int x \left(\frac{dX}{dx}\right) dx\,;$$

$$y = Xx - \frac{x^2}{2}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) dx\,;$$

$$y = Xx - \frac{x^2}{2}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{x^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) - \int \frac{x^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) dx\,;$$

$$y = Xx - \frac{x^2}{2}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{x^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) - \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) + \int \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4X}{dx^4}\right) dx\,;$$

. . . .

$$y = Xx - \frac{x^2}{2}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{x^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) - \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{d^4X}{dx^4}\right) - \text{ecc.} + C.$$

Se questa serie nei casi particolari sarà convergente, ci darà subito il valore dell' y. Essa è di Giovanni Bernulli.

§ 161. Con questa bernulliana serie dimostriamo un importantissimo teorema, chiamato da Leibniz, che ne fu l'autore, *Differenziatio de curva in curvam.*

Supponendo che P rappresenti una funzione di due variabili x, y, e che non possa assegnarsi l' integrale $\int Pdx$, il differenziale di questo integrale rispetto all' y sarà $\left(\frac{d\int Pdx}{dy}\right) = \int \left(\frac{dP}{dy}\right) dx$. Se Pdx fosse integrabile rispetto all' x, la ricerca non avria difficoltà.

Facciasi $z = \int Pdx$, e la serie bernulliana ci darà

$$z = xP - \frac{x^2}{2}\left(\frac{dP}{dx}\right) + \frac{x^3}{2\cdot3}\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) - \text{ecc.};\ \text{dunque}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = dy\left\{x\left(\frac{dP}{dy}\right) - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2P}{dxdy}\right) + \frac{x^3}{2\cdot3}\left(\frac{d^3P}{dx^2dy}\right) - \text{ec.}\right\}.$$

Ma la stessa serie ci dà

$$\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx = x\left(\frac{dP}{dy}\right) - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2P}{dydx}\right) + \frac{x^3}{2\cdot3}\left(\frac{d^3P}{dydx^2}\right) - \text{ec.};$$

dunque

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = \left(\frac{d\int Pdx}{dy}\right)dy = dy\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx,\ \text{e quindi}$$

$$\left(\frac{d\int Pdx}{dy}\right) = \int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx.$$

Noi terminiamo questo capitolo, imperciocchè quanto abbiamo detto sull' integrazione per serie basta per comprenderne la sostanza; e poi noi avremo spessissimo occasione di ritornare alle stesse cose.

CAPO V.

Della quadratura e rettificazione delle curve.

§ 162. Parliamo delle quadrature delle curve. Sia (*Fig.* 13) *ABC* una curva qualunque, della quale sia data l'equazione $y = f(x)$; sia $AE = x$, $EB = y$, e cerchisi l'espressione dell'area *ABE* compresa tra le coordinate e l'arco: questa espressione chiamasi *la quadratura* di quell'area. Facciasi $EF = \omega$, e condotta l'ordinata *CF*, si facciano i rettangoli *EFCS* circoscritto, e *EFDB* inscritto.

Il trapezio *EBCF* è maggiore del rettangolo *EBDF*, e minore dell'altro *EGCF*: egli dunque è eguale ad un rettangolo che avendo la stessa base ω

degli altri, ha un' altezza eguale ad FD + una quantità minore di CD, e che debbe annullarsi quando ω è nullo: sarà dunque $EBCF = \omega (y + \omega z)$ indicando con ωz quella quantità.

Ora indicando lo spazio ABE con $\phi (x)$, sarà $BEFC = ABCF - ABE = \phi (x + \omega) - \phi (x) =$

$$\omega \left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \text{ecc.}, \text{ e quindi}$$

$$\omega y + \omega^2 z = \omega \left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \text{ecc.};$$

ma quest' equazione sussister debbe qualunque sia ω, dunque $y = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, da cui si ricava $d\phi = y dx$; cioè *il differenziale dell' area* ABE *è eguale all' ordinata* y *moltiplicata per* dx; *dunque l' area è quella all' integrale del differenziale* ydx; *è*, *cioè*, ϕ (x) $= \int$ ydx.

Saremmo giunti anco allo stesso risultamento, cercando l' espressioni algebratiche dei due rettangoli circoscritto ed inscritto, ed assegnando la condizione che è sempre necessaria, acciò il trapezzio sia maggiore di un rettangolo, e minore dell' altro. Il raziocinio sarebbe stato compagno a quello adoperato al § 96 per rinvenire il differenziale di un arco qualunque.

§ 163. Se la funzione $f(x)$ esprimesse l' area della sezione di un solido fatta perpendicolarmente all' ascissa x, si dimostrerebbe nella stessa guisa che $f(x)\,dx$ è il differenziale della funzione che rappresenta la solidità; *così per avere la solidità di una porzione corrispondente all' ascissa* x *di un qualunque solido*, *bisogna prendere l' integrale di* f (x) dx.

Per esempio: l' asse di una paraboloide sia l' asse delle x; il vertice di essa sia l' origine delle ascisse: una qualunque sezione perpendicolare all' asse, e corrispondente all' ascissa x, sarà πy^2 ovvero (ponendo per y^2 il suo valore ax) πax, ove π indica

la semicirconferenza del circolo che ha per raggio l'unità.

La solidità adunque sarà l'integrale del differenziale $\pi a x d x$; sarà, cioè, $\frac{\pi a x^2}{2} + C$; e se la costante si determina in guisa che la solidità sia nulla quando $x = 0$, si avrà $C = 0$, e la cercata solidità sarà $\frac{\pi a x^2}{2}$, ovvero $\pi y^2 \cdot \frac{x}{2}$; questa solidità, cioè, eguaglierà la metà del cilindro circoscritto.

§ 164. *Rettificare* una curva significa assegnare una funzione dell'ascissa, la quale sia eguale all'arco corrispondente a quest'ascissa. Sia (*Fig.* 6) ZZ la curva da rettificarsi, ed indichiamo con $F(x)$ o soltanto con F l'arco ZM corrispondente all'ascissa $AP = x$. Abbiamo dimostrato (§ 96) che il differenziale dell'arco è sempre eguale a $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx$, dunque sarà $F(x) = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx + C$.

§ 165. Immaginiamo ora che la curva ZZ ravvolgendosi attorno l'asse delle ascisse, generi una conoide: le ordinate $MP = y = f(x)$, $QN = f(x + \omega)$ descriveranno nel tempo stesso due circoli dei quali esse saranno i raggi. L'arco MON descriverà una fascia della conoide; la tangente MT e la corda MN descriveranno due fasce coniche, delle quali l'una sarà necessariamente maggiore della fascia conoidica, l'altra necessariamente minore. Basta a persuadersene il supporre che l'intiera figura $ZMTmZ'$ costruita come è detto al (§ 96), si ravvolga attorno l'asse AB; ed allora le tre superficie descritte in quel ravvolgimento dalle linee spezzate MTm, $MONm$, MNm avranno i medesimi termini, e volteranno sempre la concavità dalla stessa parte, l'una

contenendo entro di sè l' altra ; sarà dunque la superficie più esterna descritta da *MTm* maggiore di quella generata da *MONm*, e questa maggiore dell'altra fatta da *MNm*. Le metà poi di sì fatte superficie avranno ancora esse la stessa proporzione tra di loro.

Questo, premesso, cerchiamo l' espressioni algebratiche di quelle tre superficie. Essendo

$$MP = y = f(x) \; ; \; QT = y + \omega \left(\frac{dy}{dx}\right);$$

$$MT = \omega \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}} = \omega \, \phi(x)$$, la superficie descritta da MT sarà $\omega\phi(x) \cdot \pi \left\{ y + \frac{\omega}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\}$, ove π indica la circonferenza di un cerchio che ha per raggio l' unità.

Nel modo stesso essendo $NR = \omega\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + \text{ec.};$

$$MN = \omega \sqrt{\left\{ 1 + \left[\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{\omega}{2} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + \text{ecc.} \right]^2 \right\}}$$

$$= \omega \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \right\}} + \omega^2 H,$$ ove con $\omega^2 H$ è rappresentato il complesso dei termini nei quali ω si trova elevato a potenze superiori alla prima, la superficie descritta dalla corda MN sarà

$$\left\{ \omega\phi(x) + \omega^2 H \right\} \cdot \pi \left\{ y + \frac{\omega}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + \text{ecc.} \right\}.$$

Pertanto se rappresentiamo con ψx la funzione dell' ascissa, che esprime la superficie della conoide, sarà $\psi(x + \omega) - \psi(x)$ la superficie di quella fascia conoidica ; ed affinchè questa, rispetto alla grandezza, stia sempre tramezzo alle superficie delle fasce coniche, qualunque siasi ω, si troverà, con un raziocinio eguale a quello fatto (§ 96), si troverà, dico, che $\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)$ debbe sempre eguagliare $\pi\phi(x) \cdot f(x)$:

Dunque sarà $\psi(x) = \pi \int y \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}} dx.$

§ 166. Se nell' arco della curva corrispondente all' aumento indeterminato ω s' incontrasse un qualche punto singolare, non avrebbero allora più luogo i discorsi fatti qui sopra; siccome per altro la grandezza e la situazione di ω è per noi arbitraria, così noi la possiamo sempre ideare tale, che l' ω cada al di qua o al di là del punto singolare; perciò niuna eccezione vengono a soffrire le regole da noi assegnate.

§ 167. La normale di una curva riferita alle coordinate ortogonali x, y è eguale a $y\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}}$; se dunque costruiamo un' altra curva, la quale avendo per ascissa la x, abbia per ordinata corrispondente la quantità $z = y\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}}$, la di lei superficie sarà $\int z dx = \int y \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}} dx$; ma la superficie della conoide l' abbiamo trovata qui sopra eguale a $\pi \int y \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}} dx$; dunque starà la prima superficie alla seconda, come $1 : \pi$; *Dunque la figura fatta dalle perpendicolari ad una curva data, applicate come ordinate all' asse, è proporzionale alla superficie dello stesso solido di rivoluzione, formato dalla rotazione della data curva medesima.*

Questo teorema è il primo, cui Leibnizio applicò il calcolo differenziale.

§ 168. Sia ACB un quarto d' elisse, il cui semiasse maggiore $AC = a$, il minore $CB = b$. Sia inoltre ACD un quarto del cerchio che ha per centro C, e per raggio AC. Facciamo (*Fig.* 14) $AP = x$, $PM = y$, $PZ = z$, ed avremo

$y = \frac{b}{a} \surd (2ax - x^2)$, $z = \surd (2ax - x^2)$: ora (162) la superficie $APM = \int y dx = \frac{b}{a} \int \surd (2ax - x^2)\, dx$, e la superficie $APZ = \int z dx = \int \surd (2ax - x^2)\, dx$; dunque $APM = \frac{b}{a} APZ$, cioè *l' area ellittica sta a quella corrispondente circolare, come la metà dell' asse minore alla metà dell' asse maggiore.*

La quadratura pertanto dell' elisse dipende da quella del circolo, ed in conseguenza dall' integrazione di $\surd (2ax - x^2)\, dx$.

Se l' origine dell' ascisse fosse stata nel centro, allora fatto $PC = x$, avremmo trovato che la quadratura di quelle due curve dipende dal valore di $\int \surd (a^2 - x^2)\, dx$.

Per ottenere questo valore, io osservo che

$\int \surd (a^2 - x^2)\, dx = \int \frac{a^2 dx}{\surd (a^2 - x^2)} - \int \frac{x^2 dx}{\surd (a^2 - x^2)}$, e facendo $a = 1$, avremo

$\int \surd (1 - x^2)\, dx = \int \frac{dx}{\surd (1 - x^2)} - \int \frac{x^2 dx}{\surd (1 - x^2)}$, e perciò (§ 139)

$$\int \surd (1 - x^2)\, dx = Arc.sen\, x + \frac{1}{2} x \surd (1 - x^2) - \frac{1}{2} Arc.sen\, x$$
$$+ C = \frac{1}{2} \{ Arc.\, sen\, x + x \surd (1 - x^2) \} + C:$$

così la quadratura dell' ellisse e del circolo dipende dalla rettificazione del circolo.

Sia $x = 1$; e sarà allora la superficie $CAD = \frac{1}{2} \cdot AZD = AZD \cdot \frac{AC}{2}$.

§ 169. Sia da riguardarsi l' iperbola. Uno dei suoi assi sia 2, e l' altro $2b$. La di lei equazione sarà,

come è noto, $y=b\sqrt{(x^2-1)}$. Indichiamo con S lo spazio iperbolico da riguardarsi, ed avremo

$S=\int y dx=b\int\sqrt{(x^2-1)}\,dx$: ma $b\int\sqrt{(x^2-1)}\,dx$

$$=b\sqrt{(-1)}\cdot\int\sqrt{(1-x^2)}\,dx=\frac{b\sqrt{(-1)}}{2}\left\{Arc.\,sen\,x\right.$$

$$\left.+x\sqrt{(1-x^2)}\right\}+C;$$ dunque

$$S=\frac{b}{2}\left\{\sqrt{(-1)}\cdot Arc.\,sen\,x+x\sqrt{(x^2-1)}\right\}+C.$$

Ora l' introduzione al calcolo sublime c' insegna che

$\sqrt{(-1)}\cdot Arc.\,sen\,x=l\{\sqrt{(1-x^2)}+x\sqrt{(-1)}\}$;

dunque

$$S=\frac{b}{2}\left\{l\{\sqrt{(1-x^2)}+x\sqrt{(-1)}\}+x\sqrt{(x^2+1)}\right\}+C;$$

la costante debbe determinarsi in modo che l' integrale si annulli quando $x=1$; avremo pertanto

$C=-\frac{b}{2}l\sqrt{(-1)}$, ed in conseguenza

$$S=\frac{b}{2}\left\{x\sqrt{(x^2-1)}+l\{x+\sqrt{(x^2-1)}\}\right\}.$$

§ 170. Sia (*Fig.* 14) ABC una parabola apolloniana, $AP=x$, $PM=y$, e quindi $x^2=2by$, indicando con $2b$ il parametro.

Abbiamo (164) dimostrato che

$AM=\int dx\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$; dunque

$$AM=\int dx\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}.$$

Onde integrare quest' espressione facciamo

$\frac{x^2}{b^2}=-u^2$, ed avremo allora

$\int dx\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}=b\sqrt{(-1)}\int du\sqrt{(1-u^2)}$: ma lo

stesso raziocinio da noi fatto per integrare la formola, da cui dipende la quadratura dell' iperbola, ci dà

$$b\sqrt{(-1)}\int du\sqrt{(1-u^2)}=\frac{b}{2}\Big\{l\{\sqrt{(1-u^2)}$$

$$+u\sqrt{(-1)}\}+u\sqrt{(u^2-1)}\Big\}; \text{ dunque}$$

$$AM=\frac{b}{2}\Big\{l\,\frac{x+\sqrt{(b^2+x^2)}}{b}+\frac{x\sqrt{(b^2+x^2)}}{b^2}\Big\};$$

non abbiamo aggiunto costante arbitraria, perchè determinandola, l' avremmo trovata nulla.

Se poi noi facciamo $AL=x'$, $LK=y'$, avremo

$$MK=\frac{b}{2}\Big\{l\,\frac{x+\sqrt{(b^2+x^2)}}{b}-l\,\frac{x'+\sqrt{(b^2+x'^2)}}{b}\Big\}$$

$$+\frac{x\sqrt{(b^2+x^2)}}{2b}-\frac{x'\sqrt{(b^2-x'^2)}}{2b}=\frac{b}{2}\,l\,\frac{x+\sqrt{(b^2+x^2)}}{x'+\sqrt{(b^2+x'^2)}}$$

$$+\frac{1}{2b}\Big\{x\sqrt{(b^2+x^2)}-x'\sqrt{(b^2+x'^2)}\Big\}.$$

Trovata l' espressione di una porzion qualunque d' arco MK di cui sono date le coordinate all' estremità, noi potremo risolvere il seguente problema.

Dato l' arco MK, *trovarne un altro che io indico con* E, *tale che* MK : E :: n : 1.

Per questo supponiamo u, t le due ascisse competenti ai due capi dell' arco incognito; indichiamo con α la parte algebratica contenuta in MK, e con $\frac{b}{2}\,l\beta$ la parte logaritmica, avremo allora

$$\alpha+\frac{b}{2}\,l\beta:\frac{b}{2}\Big\{l\,\frac{t+\sqrt{(b^2+t^2)}}{u+\sqrt{(b^2+u^2)}}\Big\}+\frac{1}{2b}\Big\{t\sqrt{(b^2+t^2)}$$

$$-u\sqrt{(b^2+u^2)}\Big\}::n:1,$$

ed in conseguenza

$$a+\frac{b}{2}l\beta=\frac{nb}{2}\,l\frac{t+\sqrt{(b^2+t^2)}}{u+\sqrt{(b^2+u^2)}}+\frac{n}{2b}\left\{t\sqrt{(b^2+t^2)}\right.$$
$$\left.-u\sqrt{(b^2+u^2)}\right\},$$

la quale equazione, eguagliando rispettivamente tra loro le quantità algebratiche e le trascendenti, si scomporrà in due altre equazioni, da cui potranno ricavarsi i valori dell' u e del t.

Il problema in cui si cerca la determinazione di due archi parabolici, tali che la somma o la differenza sia rettificabile, cioè espressa da una quantità algebratica, non ha alcuna difficoltà. Imperocchè supponendo dato uno di questi archi, ed una delle estremità dell' altro, si sommeranno o sottrarranno le loro espressioni; quindi eguagliando a zero i trascendenti che vi si trovano, avremo un' equazione per determinare l' altra estremità dell' arco incognito, pel che esso diverrà conosciuto.

§ 171. Rispetto alla rettificazione della ellisse, non darò qui che un brevissimo cenno, giacchè ho destinato un capitolo per le dottrine che risguardano sì fatta rettificazione.

Indicando con e l' eccentricità dell' ellisse, e con l' unità il di lei semiasse maggiore, il quadrato del semiasse minore sarà $1-e^2$, e quindi l' equazione della curva $y^2=(1-e^2)(1-x^2)$. Ora (§ 164) rappresentando con s l' arco corrispondente all' ascissa x, si ha $s=\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}dx$; ma $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(1-e^2)\frac{x^2}{1-x^2}$, dunque $s=\int dx\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$: se facciamo nella formola del (§ 157) $a=-e^2$, avremo, onde esprimere il quarto del perimetro dell'ellisse, questa serie

$$\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1\cdot1}{2\cdot2}e^2-\frac{1\cdot1\cdot1\cdot3}{2\cdot2\cdot4\cdot4}e^4-\frac{1\cdot1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6}e^6-\text{ecc.}\right\};$$

ove $\frac{\pi}{2}$ è la quarta parte della circonferenza del circolo circoscritto all' ellisse. Una tal serie è convergentissima per l' ellissi poco allungate.

§ 172. Proponiamoci ora un problema la cui soluzione dipende dalle cose dette al § 163.

Determinare la capacità di una botte o ellittico-circolare, o ellittico-ellittica, o siano i suoi fondi uguali o disuguali, e le sue parti anteriore e posteriore simili o dissimili.

Sia (*Fig.* 15) $FOPG$ la sezione della botte verticale in lungo, $Q\phi\phi'Q'$ la sua sezione orizzontale in lungo, $AZBZ'$ la sua sezione trasversale massima, $AZBP\phi'GQ'Z'$ la sua parte anteriore, e $G\phi'PQ'$ il fondo, che a distinzione chiamerò testa, $AZBO\phi FQZ'$ la parte posteriore, della quale $F\phi OQ$ il fondo. Sia CA il semiasse maggiore della sezione ellittica trasversale massima $= B$, ed il suo semiasse minore $CZ = a$. Sia il semiasse maggiore della testa $IG = b$, e supposta la parte anteriore tutta regolare, e perciò la testa simile alla sezione trasversale massima, sarà $I\phi' = \frac{a}{B} b$; e sia il semiasse maggiore del fondo $DF = b'$, conseguentemente pel supposto medesimo della regolarità della parte posteriore, il semiasse minore $D\phi = \frac{a}{B} b'$.

Sia poi l' ellisse dell' arco anteriore verticale AG espressa per mezzo dell' equazione $y^2 = \frac{B^2}{A^2} \cdot (A^2 - x^2)$, e l'ellisse dell'arco anteriore orizzontale $Z\phi'$ per l'equazione $\theta^2 = \frac{a^2}{G^2} \cdot (G^2 - x^2)$. L' ellisse dell' arco posteriore verticale AF abbia per equazione $y'^2 = \frac{B^2}{A'^2} \cdot (A'^2 - x^2)$, e l' ellisse dell' arco posteriore orizzontale abbia a sua equazione $\theta'^2 = \frac{a'^2}{G'^2} (G'^2 - x^2)$.

Sia C il centro di tutte quattro l' ellissi; si concepisca nella parte anteriore ad una indeterminata ascissa $x = CR$ la sezione trasversale $S\phi''NQ''$; in fine che questa sia simile alla massima $AZBZ'$, dovrà essere $B : a :: y : \theta$, e perciò $\theta = \frac{ay}{B}$; $\theta = \frac{a^2y^2}{B^2}$. Dunque le due equazioni delle due ellissi costituenti la forma della parte anteriore saranno $y^2 = \frac{B^2}{A^2} \cdot (A^2 - x^2)$, $\theta^2 = \frac{a^2}{A^2}(A^2 - x^2)$. Similmente si troverà che le due equazioni dell' ellisse costituenti la forma della parte posteriore esser dovranno $y'^2 = \frac{B}{A'^2}(A'^2 - x^2)$, $\theta'^2 = \frac{a^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$. Ciò posto, non ostante la diversa curvatura della botte da A in G, e da A in F, da Z in ϕ, e da Z in ϕ', le sezioni trasversali tutte saranno simili alla sezione massima $AZBZ'$, e simili tra loro. Sia ora la lunghezza intera DI della botte $= K$, e sia indeterminatamente $\frac{1}{m}K = CI$ la lunghezza della parte anteriore, così $\left(1 - \frac{1}{m}\right)K$ quella CD della posteriore. Significata per π la circonferenza del circolo del diametro $= 1$, sarà $\frac{a}{B}\pi y^2$ l' area dell'ellittica trasversale indeterminata sezione $S\phi''NQ''$, ed essendo $RS = y$, $CR = x$, sarà $\frac{a\pi}{B}y^2dx$ il differenziale della solidità dalla parte anteriore della botte, e la porzione di essa da C in R sarà

$$\frac{a\pi}{B}\int y^2dx = \frac{a\pi}{B}\int\left(B^2 - \frac{B^2}{A^2}\cdot x^2\right)dx = \frac{a\pi}{B}\left(B^2x - \frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right),$$

e fatto $x = \frac{1}{m}K$, si avrà l'intiera parte anteriore della botte $\frac{a\pi}{B}\left(B^2 \cdot \frac{1}{m}K - \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{K^3}{3m^3}\right)$. Similmente si vede risultare l' intiera parte posteriore
$\frac{a\pi}{B}\left\{B^2\left(1-\frac{1}{m}\right)K - \frac{B^2}{A'^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)^3 \cdot \frac{K^3}{3}\right)$. Dunque la capacità della botte intera che chiamerò (C), sarà
$(C) = \frac{a\pi}{B}\left\{B^2 K - \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{K^3}{3M^3} - \frac{B^2}{A'^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)^3 \cdot \frac{K^3}{3}\right.$; ma dall'equazione $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$, fatto $y = IG = b$, $x = \frac{1}{m}K$, ricavasi $A^2 = \frac{B^2K^2}{m^2(B^2 - b^2)}$, e dall'equazione $y'^2 = \frac{B^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$, fatto $y' = DF = b'$, $x = \left(1 - \frac{1}{m}\right)K$,

ricavasi $A'^2 = \frac{B^2K^2\left(1-\frac{1}{m}\right)^2}{B^2 - b'^2}$; sostituendo, sarà

$$(C) = \frac{a\pi}{3B}\left\{3B^2K - \frac{K}{m}(B^2 - b^2) - \left(1-\frac{1}{m}\right)K(B^2 - b'^2)\right\}$$
$$= \frac{a\pi K}{3B}\left\{2B^2 + \frac{1}{m}b^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right)b'^2\right\}.$$

Questa generale dimostrazione della cubatura delle botti ellittico-ellittiche è del celebre professore Cossali : io l' aveva data per casi non così generali.

§ 173. Veniamo ai casi particolari. Se le parti anteriore e posteriore siano egualmente lunghe, cioè se sia $\frac{1}{m}K = \frac{1}{2}K$, e non ostante siano i semiassi b, b' della testa e del fondo disuguali, saranno A, A'

disuguali, cioè la curvatura della parte anteriore diversa dalla curvatura della posteriore, e si avrà

$$(C) = \frac{a\pi k}{3B}\left(2\,B^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{b'^2}{2}\right), \text{ ovvero}$$

$$(C) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{K}{6}\{4AB\cdot 2CZ + GP\cdot 2I\phi' + FO\cdot 2D\phi\}.$$

Di qui ricaveremo questa regola pratica per ricubare una botte sì fatta: *Moltiplicate tra loro i respettivi diametri di ciascuna delle tre sezioni della botte, ed avrete tre prodotti: al quadruplo del prodotto che danno i diametri della maggior sezione aggiungete gli altri due prodotti: moltiplicate la somma pel sesto della lunghezza della botte, e questo prodotto moltiplicatelo anche per* 0, 785398, *ch' è la quarta parte della circonferenza di un circolo che ha per diametro* 1, *ed avrete espressa da quest' ultimo prodotto la capacità della botte.* Una tal regola è dell' Astronomo ORIANI.

Se $A = A'$, cioè se la curvatura della botte sia la stessa nella parte anteriore e nella posteriore, ed i semiassi b, b' siano disuguali, si avrà

$$\frac{B^2K^2}{m^2(B^2 - b^2)} = \frac{B^2K^2}{B^2 - b'^2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2; \text{ donde}$$

$$m^2\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 = (m-1)^2 = \frac{B^2 - b'^2}{B^2 - b^2}; \text{ ed}$$

$$m - 1 = \frac{\sqrt{(B^2 - b'^2)}}{\sqrt{(B^2 - b^2)}}; \text{ e quindi}$$

$$(C) = \frac{a\pi K}{3B}\left(2B^2 + \frac{b^2\sqrt{(B^2 - b^2)}}{\sqrt{(B^2 - b^2)} + \sqrt{(B^2 - b'^2)}} + \frac{b'^2\sqrt{(B^2 - b'^2)}}{\sqrt{(B^2 - b^2)} + \sqrt{(B^2 - b'^2)}}\right),$$

che moltiplicando e dividendo le frazioni per $\sqrt{(B^2 - b^2)} - \sqrt{(B^2 - b'^2)}$, si riduce alla forma più semplice

$$(C)=\frac{a\pi K}{3B}\{B^2+b^2+b'^2+\sqrt{(B^2-b^2)(B^2-b'^2)}\}.$$

Se $b=b'$, si avrà $(C)=\frac{a\pi K}{3B}(2B^2+b^2)$.

Se oltre a ciò è $a=B$, nel qual caso la botte è ellittico-circolare, si avrà $(C)=\frac{\pi K}{3}(2B^2+b^2)$.

§ 174. Rappresentando con $f(z)$ una sezione fatta in un solido perpendicolarmente all'asse delle ascisse, e con $f(z+x)$ la sezione a questa parallela, e da essa distante della quantità x, vogliasi l'espressione algebratica della porzione del solido da quelle due sezioni intercetta.

Una tale espressione è $\int f(z+x)\,dx+C$, determinando la costante in guisa che sia nullo quell'integrale, quando $x=0$. Ora se noi rappresentiamo $\left(\frac{df}{dz}\right)$ con f'; $\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)$ con f'', ecc., e quella cercata solidità con S, avremo

$$S=\int\Big\{f(z)+xf'+\frac{x^2}{2}f''+\frac{x^3}{2\cdot3}f'''+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}f''''$$
$$+\text{ecc.}\Big\}dx+C=xf(z)+\frac{x^2}{2}f'+\frac{x^3}{2\cdot3}f''$$
$$+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}f'''+\frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}f''''+\text{ecc.}+C.$$

Supponiamo che la figura del solido sia tale che una sua qualunque sezione $f(\omega)$ perpendicolare all'asse delle ascisse sia $f(\omega)=a+b\omega+c\omega^2+e\omega^3$, avremo in questa ipotesi $f''''=f^{\text{v}}=\text{ecc.}=0$, e perciò

$$S=xf(z)+\frac{x^2}{2}f'+\frac{x^3}{2\cdot3}f''+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}f'''$$
$$=\frac{x}{3}\Big\{f(z)+\frac{x}{2}f'+\frac{x^2}{2\cdot2}f''+\frac{x^3}{2\cdot2\cdot3}f'''$$
$$+2f(z)+xf'+\frac{x^2}{4}f''+\frac{x^3}{8\cdot3}f'''\Big\}.$$

Ma in questa medesima ipotesi si ha

$$f(z)+\frac{x}{2}f'+\frac{x^2}{2\cdot 2}f''+\frac{x^3}{2\cdot 2\cdot 3}f'''=\frac{f(z)+f(z+x)}{2};$$

$$2f(z)+xf'+\frac{x^2}{4}f''+\frac{x^3}{8\cdot 3}f'''=2f\left(z+\frac{x}{2}\right);\text{ dunque}$$

$$S=\frac{x}{3}\left\{\frac{f(z)+f(z+x)}{2}+2f\left(z+\frac{x}{2}\right)\right\};$$

dunque *la solidità di una siffatta porzione di solido è eguale alla semisomma delle due basi* f(z), f(z+x), *più due volte la sezione di mezzo tra esse, il tutto moltiplicato pel terzo della distanza delle basi.*

Di questa proprietà pertanto, di potersi, cioè, misurare con una tal regola, sono dotati tutti quei solidi nei quali la sezione normale all' asse delle ascisse x è da questa funzione $a+bx+cx^2+ex^3$ rappresentata. Così l' ellissoide, la paraboloide, l' iperboloide, il cono sono solidi di tal fatta; io credo che il primo che abbia dimostrato in queste conoidi un tal pregio, sia stato il sig. *Giuseppe Rossi Amatis*, in un opuscolo stampato a *Torino* nel 1806.

§ 175. Se si disegna la projezione di una curva a doppia curvatura sopra il piano delle due coordinate x, y, si può risguardare questa projezione come l' asse curvilineo della curva a doppia curvatura: allora indicando con s l' arco della curva di projezione, le coordinate della quale sono x, y, e supponendo che quest' arco sia disteso in linea retta, saranno s, z le coordinate rettangolari della curva a doppia curvatura spiegata sopra un piano.

Questa riflessione ci dà ragione di applicare alle curve a doppia curvatura le formole della quadratura e della rettificazione da noi assegnate (§§ 162, 164) per le curve piane.

Basterà porre in quelle formole s in vece dell' x: così per la quadratura avremo lo spazio $=\int z\left(\frac{ds}{dx}\right)dx$,

e per la rettificazione, l' arco

$$=\int dx \sqrt{\left\{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}; \text{ ma}$$

$$ds=\left(\frac{ds}{dx}\right)dx=dx\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}};$$

dunque la prima formola diverrà

$$\int z dx \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}; \text{ e la seconda}$$

$$\int dx \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}.$$

È inutile avvertire che lo spazio espresso dalla prima formola è la superficie del cilindro retto che ha per base la projezione della curva a doppia curvatura, ed è terminato da questa curva stessa.

CAPO VI.

Integrazione per mezzo degli archi dell' ellisse e dell' iperbola.

§ 176. Abbiamo veduto (§ 168) come si hanno talvolta alcuni integrali espressi per mezzo degli archi di cerchio: vediamo adesso in qual modo certe funzioni differenziali integrar si possano coll' ajuto degli archi dell' ellisse e dell' iperbola.

Essendo rappresentato da $2a$ l' asse maggiore di una ellisse, da $2b$ l' asse minore, da x e da y le coordinate, presa l' origine nel centro, si sa che $y^2=\frac{bb}{aa}(a^2-x^2)$ è l' equazione di questa curva; dunque l' arco corrispondente a queste coordinate, il quale è, generalmente parlando, rappresentato da $s=\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}dx$, sarà

$$s=\int\frac{\sqrt{\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\,dx.$$

Così ogni differenziale di questa forma $\frac{\sqrt{(M-Nx^2)}}{\sqrt{(P-Qx^2)}}dx$, nel quale M, P, Q, N sono quantità positive, ha per integrale un arco d'ellisse moltiplicato per un fattore costante: esso in fatti può ricevere questa forma $\frac{\sqrt{\frac{M}{P}}\cdot\sqrt{\left(\frac{P}{Q}-\frac{NP}{MQ}x^2\right)}}{\sqrt{\left(\frac{P}{Q}-x^2\right)}}dx$;

questo arco apparterrà ad un' ellisse, i cui semiassi saranno $a=\sqrt{\frac{P}{Q}}$; $b=\sqrt{\frac{P}{Q}}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{NP}{MQ}\right)}$.

Facciamo $a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=u^2$, ed avremo allora

$$s=-\int\frac{u^2du}{\sqrt{\{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2\}}}$$

$$=-\int\frac{u^2du}{\sqrt{\{(a^2-u^2)(u^2-b^2)\}}}\ldots(1).$$

Facciamo $a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=\frac{a^2b^2}{u^2}$, ed avremo con quest' altra trasformazione

$$s=\int\frac{a^2b^2du}{u^2\sqrt{\{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2\}}}$$

$$=\int\frac{a^2b^2du}{u^2\sqrt{\{(a^2-u^2)(u^2-b^2)\}}}\ldots(2).$$

Queste due formole (1), (2) servono a riconoscere i differenziali che dipendono dalla rettificazione dell' ellisse. Si avverta che noi supponiamo che esse

appartengano ad una vera ellisse, e che perciò a e b siano sempre diseguali.

§ 177. Dunque ogni formola differenziale cui possa darsi la forma $\frac{\pm Mu^2du}{\sqrt{(Nu^2 - Pu^4 - Q)}}$, quando M, N, P, Q sono quantità positive date, ha per integrale una quantità dipendente dalla rettificazione dell' ellisse. In fatti se noi facciamo $\frac{\pm M}{\sqrt{P}} = -A$; $\frac{N}{P} = B$; $\frac{Q}{P} = C$, la proposta formola diverrà

$A \cdot \frac{-u^2du}{\sqrt{(Bu^2 - u^4 - C)}}$, la quale paragonata con la formola (1) ci fa vedere che essa è il prodotto del fattore costante A per la differenziale di un arco d' ellisse, di cui gli assi sono $2a$ e $2\,b$; questi si trovano facendo $a^2 + b^2 = B$, $a^2b^2 = C$, pel che si ha

$$2a = \sqrt{(B + 2\sqrt{C})} + \sqrt{(B - 2\sqrt{C})}$$

$$2b = \sqrt{(B + 2\sqrt{C})} - \sqrt{(B - 2\sqrt{C})}.$$

Se $B < 2\sqrt{C}$ questi due assi divengono immaginarj, e questo prova che la formola non può avere alcun integrale; essa in fatti è in tal caso immaginaria, come si vede, dando a quel radicale questa forma $\sqrt{\left\{\left(\frac{B^2}{4} - C\right) - \left(u^2 - \frac{B}{2}\right)^2\right\}}$.

Nella stessa guisa ogni differenziale riducibile alla forma $\frac{\pm Mdu}{u^2\sqrt{(Nu^2 - Pu^4 - Q)}}$, essendo M, P, Q, N sempre quantità positive, si può integrare colla rettificazione dell' ellisse; in fatti è facile ridurlo alla forma $\frac{A}{C} \cdot \frac{Cdu}{u^2\sqrt{(Bu^2 - u^4 - C)}}$, la quale paragonata con la formola (2) del § 176, mostra che essa può rappresentare un arco d' ellisse.

§ 178. Rappresentando con $2a$ e $2b$ gli assi di una iperbola, e con x, y le sue coordinate prese dal centro, si sa che la di lei equazione è $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$. Noi supponiamo a e b diseguali.

Rappresentiamo con s l' arco della curva che corrisponde a queste coordinate, e si avrà

$$s = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - a^2\right)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}\,dx.$$ Ogni differenziale adunque di questa forma $\frac{\sqrt{(Mx^2-N)}}{\sqrt{(Qx^2-P)}}\,dx$, nel quale M, N, P, Q sono quantità positive, avrà per integrale un arco d' iperbola: esso in fatti può prendere la forma $\frac{\sqrt{\frac{N}{P}}\cdot\sqrt{\left(\frac{MP}{NQ}x^2 - \frac{P}{Q}\right)}}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{P}{Q}\right)}}$. I semiassi poi di questa iperbola saranno

$$a = \sqrt{\frac{P}{Q}}\,;\quad b = \sqrt{\frac{P}{Q}}\cdot\sqrt{\left(\frac{MP}{NQ} - 1\right)}.$$

Facciamo ora $\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - a^2 = u^2$, e sarà

$$x = \frac{a\sqrt{(u^2+a^2)}}{\sqrt{(b^2+a^2)}},$$ quindi

$$s = \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{(u^2+a^2)}\cdot\sqrt{(u^2-b^2)}}$$

$$= \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{\{(a^2-b^2)u^2 + u^4 - a^2b^2\}}} \;\ldots\; (3);$$

poniamo ora $\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - a^2 = \frac{a^2b^2}{u^2}$, e si troverà

$x = \frac{a^2 \sqrt{(u^2 + b^2)}}{u\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, e quindi

$$s = \int \frac{-a^2 b^2 du}{u^2 \sqrt{\{(a^2 - b^2) u^2 - u^4 + a^2 b^2\}}} \quad \ldots \quad (4).$$

La quantità che è sotto al radicale è composta dei due fattori $u^2 + b^2$, $a^2 - u^2$. Si osservi che il coefficiente di u^2 nelle due formole (3), (4) è positivo o negativo, secondo che $a > b$, ovvero $b > a$.

§ 179. Dunque ogni formola differenziale che abbia la forma $\frac{Mu^2 du}{\sqrt{(Nu^2 + Pu^4 - Q)}}$, nella quale M ed N possono avere qualunque segno, mentre P e Q debbono essere positivi, ha un integrale dipendente dalla rettificazione dell' iperbola; in fatti facendo $\frac{M}{\sqrt{P}} = A$, $\frac{N}{P} = B$, $\frac{P}{Q} = C$, la nostra formola sarà $A \cdot \frac{u^2 du}{\sqrt{(Bu^2 + u^4 - C)}}$, che è il prodotto del fattore costante A per il differenziale di un arco d'iperbola, i cui assi sono dati da quest' equazioni $a^2 - b^2 = B$, $a^2 b^2 = C$, e per ciò sono $2a = \sqrt{\{2B \pm 2\sqrt{(B^2 + 4C)}\}}$, $2b = \sqrt{\{\pm 2\sqrt{(B^2 + 4C)} - 2B\}}$.

Nei termini di doppio segno prenderemo il superiore per non incontrare gl' immaginarj.

Nel modo stesso l' espressione $\frac{Mdu}{u^2 \sqrt{(Nu^2 - Pu^4 + Q)}}$, ove M, N, P, Q hanno le stesse condizioni dette sopra, è integrabile col mezzo di un arco d' iperbola, potendosi essa sempre ridurre alla formola (4).

§ 180. A rendere vie più chiare queste dottrine, facciamo un esempio.

La soluzione di un qualche problema supponiamo che ci abbia condotto, nel trovare il valore di ciò

che si cerca, all'integrale $\int \frac{2du}{u^2\sqrt{(2u^2-3u^4+1)}}$, dovendosi prendere questo integrale da $u=\frac{1}{2}$ sino ad $u=1$.

Intanto io vedo subito che quest' integrale dipenderà da un arco d' iperbola. Dando poi a questo integrale la forma $-2\sqrt{3}\int \frac{-\frac{1}{3}du}{u^2\sqrt{\left(\frac{2u^2}{3}-u^4+\frac{1}{3}\right)}}$, si avranno gli assi dell' iperbola dati da queste due equazioni $a^2b^2=\frac{1}{3}$, $a^2-b^2=\frac{2}{3}$, dalle quali si ricava $b^2=\frac{1}{3}$; $b=\sqrt{\frac{1}{3}}$; $a^2=1$; $a=1$. I due semiassi pertanto della nostra iperbola saranno 1 e $\frac{1}{\sqrt{3}}$. L' arco poi che si cerca, corrisponderà all' ascissa x. Questo valore della x ci sarà dato da quest' equazione $\frac{4}{3}x^2-1=\frac{1}{3u^2}$, la quale quando $u=\frac{1}{2}$ ci dà $x=\frac{\sqrt{7}}{2}$; quando $u=1$, ci dà $x=1$.

Dunque la quantità che si cerca, è eguale all'arco di una iperbola, della quale gli assi sono 2 e $\frac{2}{\sqrt{3}}$, moltiplicato per $-2\sqrt{3}$; quest' arco poi comincia dall' estremità dell' asse maggiore, ove $x=1$, e finisce nel punto corrispondente all' ascissa $x=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

§ 181. Ma come faremo noi ad avere gli archi dell' ellisse o dell' iperbola, dai quali rappresentati

sono gl' integrali? non si hanno per quegli archi tavole belle e costrutte, come si hanno per gli archi circolari? Per tal motivo noi ci fermeremo a trovare questi archi per approssimazione col mezzo delle serie.

Sia (*Fig.* 14) *BAC* un quarto d' ellisse, di cui *C* sia il centro, *CA* il semiasse maggiore $= 1$, *CB* la metà dell' asse minore $= b$; l' eccentricità $= c$, e quindi $b = \sqrt{(1 - cc)}$. Fatto centro in *C* col raggio *CA* si descriva il quadrante *AD*, e prendasi un arco qualunque $DZ = \phi$. Sia $CP = x$, $PM = y$, $PZ = z$, ed avremo $x = sen\,\phi$, $z = cos\,\phi$, $y : z :: b : 1$, $y = bz = b\,cos\,\phi$. Ciò premesso, si avrà

$$BM = \int \left\{ \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\phi,$$

$$BM = \int d\phi \sqrt{\{ (cos\,\phi)^2 + b^2\,(sen\,\phi)^2 \}}$$

$$= \int d\phi \sqrt{\{ 1 - (sen\,\phi)^2 + (sen\,\phi)^2 - cc\,(sen\,\phi)^2 \}}$$

$= \int d\phi \sqrt{\{ 1 - cc\,(sen\,\phi)^2 \}}$; quest' integrale dee prendersi in modo ch' egli svanisca quando $\phi = 0$. Rappresentiamolo con $E(c, \phi)$ o semplicemente con E, essendo $E(c, \phi)$ una funzione dei due elementi c, ϕ, ed avremo

$BM = E(c, \phi) = \int d\phi \sqrt{\{ 1 - c^2\,(sen\,\phi)^2 \}}$.

Potremo avere a dirittura l' arco *BM*, facendo nell' equazione (§ 176)

$$s = \int \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{1 - b^2}{1}\,x^2\right)}}{\sqrt{(1 - x^2)}}\,dx, \quad x = sen\,\phi;$$

poichè allora verrebbe

$$s = \int \frac{\sqrt{\{1 - c^2\,(sen\,\phi)^2\}}}{cos\,\phi} cos\,\phi\,d\phi = \int \sqrt{\{1 - c^2 (sen\,\phi)^2\}}\cdot d\phi.$$

Se ci piacesse avere l'arco AM, che ha il suo principio all'estremità del grande asse, facendo $MZ = \phi$, si troverebbe, indicandolo con $F(c, \phi)$, $AM = F(c, \phi) = \int d\phi \sqrt{\{1 - c^2 (\cos \phi)^2\}}$.

Anche quest' integrale debb' annullarsi se $\phi = 0$.

Parliamo dell' integrazione della formola $E(c, \phi) = \int d\phi \sqrt{\{1 - c^2 (\operatorname{sen} \phi)^2\}}$.

Se noi sviluppiamo in serie il radicale, si trova

$$E(c, \phi) = \int d\phi \left\{ 1 - \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{sen} \phi)^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} c^4 (\operatorname{sen} \phi)^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 (\operatorname{sen} \phi)^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} c^8 (\operatorname{sen} \phi)^8 - \text{ec.} \right\}:$$

ora le formole della conversione delle potenze dei seni in espressioni ordinate secondo i coseni degli angoli multipli, ci danno

$$(\operatorname{sen} \phi)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\phi}{2}$$

$$(\operatorname{sen} \phi)^4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{4 \cos 2\phi}{2^3} + \frac{\cos 4\phi}{2^3}$$

$$(\operatorname{sen} \phi)^6 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{15 \cos 2\phi}{2^5} + \frac{6 \cos 4\phi}{2^5} - \frac{\cos 6\phi}{2^5}$$

ecc.,

dunque sostituendo ed integrando, avremo

$$E(c,\phi) = \phi - \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{1}{2} \phi - \frac{\operatorname{sen} 2\phi}{2^2} \right) - \frac{1}{2 \cdot 4} c^4 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \phi - \frac{4 \operatorname{sen} 2\phi}{2^4} + \frac{\operatorname{sen} 4\phi}{2^4 \cdot 2} \right) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \phi - \frac{15 \operatorname{sen} 2\phi}{2^6} + \frac{6 \operatorname{sen} 4\phi}{2^6 \cdot 2} - \frac{\operatorname{sen} 6\phi}{2^6 \cdot 3} \right)$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}c^8\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\phi-\frac{56\,sen\,2\phi}{2^8}+\frac{28\,sen\,4\phi}{2^8\cdot2}\right.$$
$$\left.-\frac{8\,sen\,6\phi}{2^8\cdot3}+\frac{sen\,8\phi}{2^8\cdot4}\right)$$
$$-\text{ecc.}$$

Nella stessa maniera potrebbe trovarsi il valore di $F(c, \phi)$, e si avrebbe

$$F(c,\phi)=\phi-\frac{1}{2}c^2\left(\frac{1}{2}\phi+\frac{sen\,2\phi}{2^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2\cdot4}c^4\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\phi+\frac{4\,sen\,2\phi}{2^4}+\frac{sen\,4\phi}{2^4\cdot2}\right)$$
$$-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}c^6\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\phi+\frac{15\,sen\,2\phi}{2^6}+\frac{6\,sen\,4\phi}{2^6\cdot2}\right.$$
$$\left.+\frac{sen\,6\phi}{2^6\cdot3}\right)$$
$$+\text{ ecc.}$$

Per ottenere la quarta parte dell' ellisse, dobbiam fare $\phi=90^\circ=DA$, ed avremo allora $sen\,2\phi=sen\,4\phi=sen\,8\phi=$ ecc. $=0$; quindi indicando con π la semicirconferenza di un circolo che ha per raggio l' unità, e rappresentando con $E1$ questa quarta parte d' ellisse, sarà

$$E1=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}c^4\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}c^6-\text{ecc.}\right\}\ (*),$$

(*) Si ricava di qui una regola sufficientemente esatta in pratica per avere la lunghezza degli archi dei ponti ecc., che sono semiellissi: *Al triplo del quadrato del semiasse maggiore aggiungete il quadrato del semiasse minore, prendete il quoziente di questa somma, divisa per lo stesso semiasse maggiore, e moltiplicatelo pel numero fisso* 0,7854, *avrete allora la lunghezza cercata.*

la qual serie è quella stessa che trovammo al § 171. Essa tanto più converge, quanto l' eccentricità è minore.

§ 182. Queste due formole ci danno la lunghezza di un arco, o dell' intiera ellisse, quando il semiasse maggiore $= 1$: se però si avesse un' ellisse, il cui semiasse maggiore fosse $= a$, per adattarvi le serie trovate, converrebbe porvi $\frac{c}{a}$, in vece di c, ed in appresso moltiplicare per a tutta l' intiera serie. In fatti data un' ellisse il cui semiasse maggiore sia $= a$, la sua eccentricità $= c$, supponiamo che se ne formi una simile ad essa col semiasse maggiore $= 1$, l' eccentricità di questa seconda ellisse sarà $\frac{c}{a}$, e gli archi di essa moltiplicati per a, eguaglieranno quei della prima ellisse, e ciò perchè nell' ellissi simili sono proporzionali le omologhe dimensioni.

§ 183. Quando l' ellisse è molto allungata, ovvero quando l' eccentricità c si avvicina all' unità, le formole del § antecedente sono poco convergenti, e bisogna quindi cercare altra strada, onde avere approssimatamente la lunghezza di un arco d' ellisse.

Al fine bramato ci condurrà un teorema del conte Fagnani, il quale risguarda gli archi d' ellisse, la cui differenza è assegnabile in linea retta. Troviamo dunque questo teorema.

Differenziando la quantità

$$V = \frac{sen\,\phi \cos\phi}{\sqrt{\{1 - c^2 (sen\,\phi)^2\}}},\ \text{si ha}$$

$$c^2 dV = d\phi \sqrt{\{1 - c^2 (sen\,\phi)^2\}} - \frac{(1 - c^2)\, d\phi}{\{1 - c^2 (sen\,\phi^2)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Ora supponiamo $tang\,\Psi = b\; tang\,\phi$, e si avrà

$d\phi = \frac{1}{b} \cos\phi^2 \cdot \frac{d\Psi}{(\cos\Psi)^2}$: ma la relazione posta tra

Ψ e ϕ ci dà le due equazioni

$$\frac{sen\,\Psi}{cos\,\Psi}=b\frac{sen\,\phi}{\sqrt{\{1-(sen\,\phi)^2\}}},\ \frac{sen\,\Psi}{cos\,\Psi}=b\frac{\sqrt{\{1-(cos\,\phi)^2\}}}{cos\,\phi};$$

dunque fattene le debite sostituzioni, avremo

$$\frac{(1-c^2)d\phi}{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}^{\frac{3}{2}}}=d\Psi\cdot\sqrt{\{1-c^2(cos)\Psi^2\}};$$ sarà dunque

$$c^2 dV=d\phi\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}-d\Psi\sqrt{\{1-c^2(cos\,\Psi)^2\}},$$

ed integrando

$$E(c,\phi)-F(c,\Psi)=c^2V=\frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}}.$$

Se pertanto prenderemo un arco qualunque $DZ=\phi$, ed un arco $AR=\Psi$, tale che $tang\,\Psi=b\,tang\,\phi$, la differenza dei due archi ellittici BM, AN sarà eguale alla linea retta rappresentata con $\frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}}$.

§ 184. Questa retta è la differenza delle tangenti MT, NS, di modo che si ha questa singolarissima proprietà $BM-AN=MT-NS$.

A fine di dimostrarlo, prolunghiamo la tangente TM fino in T'. Facendo $CP=x$, e rappresentando con $y^2=(1-c^2)(1-x^2)$ l' equazione dell' ellisse, si trova (79) la suttangente $PT'=\frac{1-xx}{x}$, e di qui

$$MT'=\frac{\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-c^2x^2)}}{x},\ MT=\frac{x\sqrt{(1-c^2x^2)}}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Se nell' espressione di MT' facciamo $x=CQ=cos\,\Psi$, si avrà il valore di NS,

$$NS=\frac{\sqrt{\{1-(cos\,\Psi)^2\}}\sqrt{\{1-c^2(cos\,\Psi)^2\}}}{cos\,\Psi}$$

$$=\frac{b^2\,sen\,\phi}{cos\,\phi\cdot\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}}:$$

nella stessa guisa ponendo in MT, $sen\,\phi$ in vece dell'x,

sarà $MT = \frac{sen\,\phi \cdot \sqrt{\{1 - c^2(sen\,\phi)^2\}}}{\sqrt{\{1-(sen\,\phi)^2\}}}$, e quindi

$$MT - NS = \frac{sen\,\phi}{cos\,\phi}\left\{\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}} - \frac{b^2}{\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}}\right\}$$

$$= \frac{sen\,\phi \cdot c^2\{1-(sen\,\phi)^2\}}{cos\,\phi \cdot \sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}} = \frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}};$$

sarà dunque

$$BM - AN = \frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}} = MT - NS \,.....(1).$$

Da quest' equazione si ricava quest' altra

$$(2)\,......\,BM + BN = BA + \frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}}.$$

Ora se facciamo $\Psi = 90° - \omega$, avremo

$$(3)\,....\,E(c,\phi) + E(c,\omega) = E1 + \frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1-c^2(sen\,\phi)^2\}}},$$

mentre tra ϕ ed ω è questa relazione $1 = b\,tang\,\phi \cdot tang\,\omega$.

E questo è il celebre teorema del conte FAGNANI.

§ 185. Sia $\Psi + \phi = 90°$, ed avremo in questo caso l'equazione $tang\,\Psi = b\,tang\,\phi$, che si ridurrà a questa

altra $\frac{1}{tang\,\phi} = b\,tang\,\phi$, e quindi

$tang\,\phi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $tang\,\Psi = \sqrt{b}$.

Prendendo dunque $tang\,DI = \frac{1}{\sqrt{b}}$, ovvero

$tang\,AI = \sqrt{b}$, il punto I ci determinerà sopra il perimetro dell' ellisse un altro punto K, pel quale la differenza dei due archi BK e KA sarà $= 1 - b$, cioè alla differenza dei due semiassi CA, CB, per

lo che si avrà dall'equazione (1), $BK - AK = CA - CB$;

in fatti essendo $tang\,\phi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, si ha

$sen\,\phi^2 = \frac{1}{b+1}$; $(cos\,\phi)^2 = \frac{b}{b+1}$, ed in conseguenza

$$\frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1 - c^2(sen\,\phi)^2\}}} = \frac{c^2\sqrt{b}}{(b+1)\sqrt{b}} = 1 - b\text{, perchè}$$

$c^2 = 1 - b^2$.

Questa differenza è nel tempo stesso il massimo della quantità $\frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1 - c^2(sen\,\phi)^2\}}}$, come ce ne potremo assicurare cercando il valore di ϕ che rende massima la funzione stessa $\frac{c^2\,sen\,\phi\,cos\,\phi}{\sqrt{\{1 - c^2(sen\,\phi)^2\}}}$; imperocchè si troverebbe $sen\,\phi = \frac{1}{\sqrt{(b+1)}}$.

Osserviamo anco rispetto a questo punto K, che condotta la tangente bKa, e prolungata finchè termini ai due assi, la parte bK sarà eguale al semiasse maggiore, e la parte aK al semiasse minore.

Nell' ellissi poco eccentriche, il punto K è quasi al mezzo dell' arco BKA, ed in quelle molto allungate l' ordinata KL è vicinissima alla sommità A.

In fine l' equazione (3), quando facciamo $\omega = \phi$, ci dà $2E(c, \phi) = E1 + 1 - b$.

§ 186. Questo premesso, riprendiamo la formola $\int d\phi \sqrt{\{1 - c^2(sen\,\phi)^2\}}$, la quale si trasforma così

$$\int d\phi \sqrt{\{1 - c^2(sen\,\phi)^2\}} = \int d\phi \sqrt{\{1 - (sen\,\phi)^2 + b^2(sen\,\phi)^2\}} = \int d\phi\,cos\,\phi \sqrt{\{1 + b^2(tang\,\phi)^2\}};$$

dovremo dunque integrare

$$\int d\phi\,cos\,\phi \sqrt{\{1 + b^2(tang\,\phi)^2\}} = E(c, \phi).$$

Se noi supponiamo che l'arco d'ellisse non vada al di là del punto K, cioè, che sia sempre minore di BK, il termine $b^2 \, tang \, \phi^2$, il quale diviene $= b$ nel punto K, sarà sempre una quantità piccolissima rispetto al primo termine 1, e si avrà questa serie convergentissima

$$BM = \int d\phi \cos\phi \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} b^2 (tang \cdot \phi)^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} b^4 (tang \, \phi)^4 \right.$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} b^6 (tang \, \phi)^6 - \text{ecc.} \right\} = \int d\phi \cos\phi$$

$$+ \frac{1}{2} b^2 \int \frac{(sen \, \phi)^2}{\cos\phi} d\phi - \frac{1}{2 \cdot 4} b^4 \int \frac{d\phi \, (sen \, \phi)^4}{\cos\phi^3}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} b^6 \int \frac{d\phi \, (sen \, \phi)^6}{\cos\phi^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} b^8 \int \frac{d\phi \, (sen \, \phi)^8}{\cos\phi^7}$$

$+$ ecc.

Ora $\int d\phi \cos\phi = sen \, \phi$, e dal cap. III si ricava

$$\int \frac{d\phi \, (sen \, \phi)^2}{\cos\phi} = - sen \, \phi + l \, tang \left(45^\circ + \frac{1}{2}\phi\right) = -$$

$$sen \, \phi + l \frac{1 + sen \, \phi}{\cos\phi};$$

$$\int \frac{d\phi \, (sen \, \phi)^4}{(\cos\phi)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(sen \, \phi)^5}{\cos\phi^2} - \frac{3}{2} \int \frac{d\phi \, (sen \, \phi)^4}{\cos\phi}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(sen \, \phi)^5}{(\cos\phi)^2} - \frac{3}{2} \left\{ - \frac{1}{3} (sen \, \phi)^3 - sen \, \phi \right.$$

$$\left. + l \frac{1 + \cos\phi}{\cos\phi} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(sen \, \phi)^5}{(\cos\phi)^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} (sen \, \phi)^3$$

$$+ \frac{3}{2} sen \, \phi - \frac{3}{2} l \frac{1 + sen \, \phi}{\cos\phi};$$

$$\int \frac{d\phi\,(sen\,\phi)^6}{(cos\,\phi)^5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(sen\,\phi)^7}{(cos\,\phi)^4} - \frac{3}{4}\int\frac{d\phi\,(sen\,\phi)^6}{(cos\,\phi)^3} =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(sen\,\phi)^7}{(cos\,\phi)^4} - \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{(sen\,\phi)^7}{(cos\,\phi)^2} - \frac{5}{2}\int\frac{d\phi\,(sen\,\phi)^6}{cos\,\phi}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(sen\,\phi)^7}{(cos\,\phi)^4} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{(sen\,\phi)^7}{(cos\,\phi)^2} + \frac{3\cdot5}{2\cdot4}\left\{-\frac{1}{5}(sen\,\phi)^5\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}(sen\,\phi)^3 - sen\,\phi + l\,\frac{1+sen\,\phi}{cos\,\phi}\right\} = \frac{1}{4}\,(sen\,\phi)^7$$

$$- \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{(sen\,\phi)^7}{(cos\,\phi)^2} - \frac{3}{2\cdot4}(sen\,\phi)^5 - \frac{5}{2\cdot4}\,(sen\,\phi)^3$$

$$- \frac{3\cdot5}{2\cdot4}\,sen\,\phi + \frac{3\cdot5}{2\cdot4}\,l\,\frac{1+sen\,\phi}{cos\,\phi}\;;$$

dunque

$$(a)\ldots BM = sen\,\phi + \left\{\frac{1}{2}\,b^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{2}\,b^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\times\right.$$

$$\left.\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,b^6 + \text{ecc.}\right\}\left(-sen\,\phi + l\,\frac{1+sen\,\phi}{cos\,\phi}\right) - \frac{1}{2\cdot4}\,b^4\times$$

$$\frac{1}{2}(sen\,\phi)^3\,\{(tang\,\phi)^2 + 1\} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\,b^6\times$$

$$\left\{\frac{(sen\,\phi)^3\,(tang\,\phi)^4}{4} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,(sen\,\phi)^5\,(tang\,\phi)^2 -\right.$$

$$\left.\frac{3}{2\cdot4}\,(sen\,\phi)^5 - \frac{5}{2\cdot4}\,(sen\,\phi)^3\right\} - \text{ecc.}$$

§ 187. Per avere l' arco BK si farà $tang\,\phi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $sen\,\phi = \frac{1}{\sqrt{(b+1)}}$, e si avrà

$$BK = \frac{1}{\sqrt{(b+1)}} + \left\{ \frac{1}{2} b^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{1}{2} b^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} \times \right.$$

$$\left. \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} b^6 + \text{ecc.} \right\} \left(-\frac{1}{\sqrt{(1+b)}} + l\,\frac{1+\sqrt{(1+b)}}{\sqrt{b}} \right) -$$

$$\frac{1}{2\cdot 4} b^4 \left(\frac{1}{2(b+1)^{\frac{3}{2}} b} + \frac{1}{2(b+1)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} b^6$$

$$\left\{ \frac{1}{4(b+1)^{\frac{3}{2}} b^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{1}{(b+1)^{\frac{5}{2}} b} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \times \right.$$

$$\left. \frac{1}{(b+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{2\cdot 4} \cdot \frac{1}{(b+1)^{\frac{3}{2}}} \right\} + \text{ecc.}$$

Ora il coefficiente di $-\frac{1}{2\cdot 4} b^4$ è $= \frac{1}{b\sqrt{(b+1)}} \cdot \frac{1}{2}$,

e di $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} b^6$ è $= \frac{1}{b^2 (b+1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{4} - \frac{5b}{2\cdot 4} \right)$, ecc.;

dunque sarà, facendo per abbreviare

$$H = \frac{1}{2} b^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{1}{2} b^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} b^6 + \text{ecc.}$$

$$G = 1 - \frac{1}{2\cdot 4} b^3 \cdot \frac{1}{2}$$
$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} b^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{b}{2} \right)$$
$$- \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} b^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{7}{6} \cdot \frac{b}{4} + \frac{7\cdot 5}{6\cdot 4} \cdot \frac{b^2}{2} \right)$$
$$+ \text{ecc.}$$

$$BK = \frac{G}{\sqrt{(1+b)}} + H\left(-\frac{1}{\sqrt{(1+b)}} + l\frac{1+\sqrt{(1+b)}}{\sqrt{b}}\right).$$

In quest'ultima espressione possiam mettere in vece di $-\frac{1}{\sqrt{(1+b)}} + l\,\frac{1+\sqrt{(1+b)}}{\sqrt{b}}$, la serie regolare

$$l\left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right) - 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{b}{2} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{4} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^3}{6} - \text{ecc.}$$

La quarta parte dunque dell' ellisse, cioè $E1$ sarà $= 2BK - 1 + b$, giacchè la differenza tra i due archi BK, AK è $1 - b$, e si avrà

$$E1 = \frac{2G}{\sqrt{(1+b)}} - 1 + b + 2H\left(-\frac{1}{\sqrt{(1+b)}} + l\frac{1+\sqrt{(1+b)}}{\sqrt{b}}\right).$$

Siccome l' ellisse si suppone allungatissima, così le potenze di b saranno quantità assai piccole, per lo che sviluppando in serie il valore di $E1$, e trascurando le potenze ottave di b e le superiori ad esse, avremo

$$E1 = 1 - \frac{1}{4}b^2 - \frac{13}{64}\cdot b^4 - \frac{9}{64}b^6$$
$$+\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^4}{4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}b^6 + \text{ec.}\right) l\frac{4}{b},$$

ove è degno d' osservazione che nelle due serie si incontrano solo le potenze pari del b.

§ 188. Ci resterà facilissimo, adesso, calcolare la lunghezza di un arco qualunque $E(c, \phi)$ per tutti i valori di ϕ; imperocchè se $tang\,\phi < \frac{1}{\sqrt{b}}$, la formola (a) dà subito il valore di $E(c, \phi)$; e se $tang\,\phi > \frac{1}{\sqrt{b}}$, bisognerà calcolare l' arco BN per

mezzo del suo complemento AN, che resta a compire il quarto dell' ellisse, e questo stesso complemento si calcolerà per mezzo dell' arco BM, il quale differisce da esso di una quantità conosciuta; così facendo $DR = \phi$, sarà $RA = 90^\circ - \phi$, e se si prende un arco DZ, tale che $tang\ RA = b\ tang\ DZ$, ovvero $tang\ (90^\circ - \phi) = cot\ \phi = b\ tang\ DZ$, si avrà pel teorema del (§ 184) indicando DZ con ϕ', $E(c, \phi') =$

$AN + \frac{c^2 sen\ \phi' \cos \phi'}{\sqrt{\{1 - c^2 (sen\ \phi')^2\}}}$; quindi $AN = E(c, \phi') -$

$\frac{c^2 sen\ \phi' \cos \phi'}{\sqrt{\{1 - c^2 (sen\ \phi')^2\}}}$; avremo in fine

$$E(c, \phi) = E1 - E(c, \phi') + \frac{c^2 sen\ \phi' \cos \phi'}{\sqrt{(1 - c^2 (sen\ \phi')^2\}}}.$$

Potremo pertanto sempre avere, qualunque sia l' eccentricità dell' ellisse, la lunghezza approssimata di una qualunque di lei porzione. Non ci fermeremo a parlare della rettificazione dell' iperbola, e perchè questa ricerca è meno importante di quella dell' ellisse, e perchè, come or ora vedremo, la di lei rettificazione dipende da quella dell' ellisse medesima.

§ 189. Da quanto abbiamo detto al (§ 176), si sa che un arco di ellisse (presa l' origine delle coordinate nel centro) corrispondente all' ascissa

$= \frac{a\sqrt{(aa - uu)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$, essendo a il semiasse maggiore, b

il semiasse minore, è eguale a

$-\int \frac{u^2 du}{\sqrt{\{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2\}}}$; indichiamo con E

questo arco, ed avremo

$E = -\int \frac{u^2 du}{\sqrt{\{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2\}}}$. Quest' arco E

poniamo che sia nullo quando l' ascissa è nulla, cioè quando $u = a$.

Ora supponendo $\frac{\sqrt{\{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2\}}}{u}=y$,

si ha $dE=\frac{dy}{2}+\frac{(a^2+b^2-y^2)dy}{2\sqrt{\{(a^2+b^2-y^2)^2-4a^2b^2\}}}$, ovvero

$$dE=\frac{dy}{2}+\frac{(a^2+b^2-y^2)dy}{2\sqrt{(a^2+b^2+2ab-y^2)}\cdot\sqrt{(a^2+b^2-2ab-y^2)}},$$

e facendo $a^2+b^2=c^2$, $a+b=e$, $a-b=f$, si trova

$$dE=\frac{dy}{2}+\frac{(c^2-y^2)dy}{2\sqrt{(e^2-y^2)}\cdot\sqrt{(f^2-y^2)}}.$$

Poniamo

$$\frac{c^2-y^2}{\sqrt{(e^2-y^2)(f^2-y^2)}}=\frac{A\sqrt{(e^2-y^2)}}{\sqrt{(f^2-y^2)}}-\frac{B\sqrt{(f^2-y^2)}}{\sqrt{(e^2-y^2)}},$$

e determinando A, B in modo che quest'equazione sia soddisfatta, avremo $A+B=1$, $Ae^2+Bf^2=c^2$; quindi

$A=\frac{c^2-f^2}{e^2-f^2}$, $B=\frac{e^2-c^2}{e^2-f^2}$: sarà dunque

$$dE=\frac{dy}{2}+\frac{A\sqrt{(e^2-y^2)}dy}{2\sqrt{(f^2-y^2)}}+\frac{B\sqrt{(f^2-y^2)}dy}{2\sqrt{(e^2-y^2)}},$$

ed integrando

$$E=\frac{y}{2}+\frac{A}{2}\int\frac{dy\sqrt{(e^2-y^2)}}{\sqrt{(f^2-y^2)}}+\frac{B}{2}\int\frac{dy\sqrt{(f^2-y^2)}}{\sqrt{(e^2-y^2)}}.$$

Ciò premesso, poniamo $e^2-y^2=z^2$, ed avremo

$$\int\frac{dy\sqrt{(e^2-y^2)}}{\sqrt{(f^2-y^2)}}=\int\frac{-z^2dz}{\sqrt{(e^2-z^2)}\cdot\sqrt{\{z^2-(e^2-f^2)\}}},$$

che rappresenta un arco di ellisse E' di cui il semiasse maggiore $=e$, ed il minore $=\sqrt{(e^2-f^2)}$, e

l' ascissa $= \frac{e\sqrt{(e^2-z^2)}}{f}$. Facciamo anche $f^2-y^2=t^2$, e si avrà

$$\int \frac{dy\sqrt{(f^2-y^2)}}{\sqrt{(e^2-y^2)}} = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(f^2-t^2)}\cdot\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}} =$$

$$\frac{\sqrt{(f^2-t^2)}\cdot\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t} + \int \frac{f^2(e^2-f^2)\,dt}{t^2\sqrt{(f^2-t^2)}\cdot\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}};$$

di quest' espressione la prima parte è algebratica, la seconda rappresenta un arco d' iperbola preso negativamente (178), i cui semiassi sono f, $\sqrt{(e^2-f^2)}$, e l' ascissa corrispondente contata dal centro è

$$\frac{f^2\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{et}.$$

Se dunque noi indichiamo con H quest' arco, si ha

$$\int \frac{dy\sqrt{(f^2-y^2)}}{\sqrt{(e^2-y^2)}} = \frac{\sqrt{(f^2-t^2)}\cdot\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t} - H.$$

In tal guisa troveremo

$$E = \frac{y}{2} + \frac{A}{2}E' + \frac{B}{2}\cdot\frac{\sqrt{(f^2-t^2)}\cdot\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t} - \frac{B}{2}\cdot H,$$

da cui si ricaverà

$$H = \frac{2}{B}\left\{\frac{y}{2} + \frac{A}{2}E' - E + \frac{B}{2}\cdot\frac{\sqrt{(f^2-t^2)}\cdot\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t}\right\}$$

$$= \frac{y}{B} + \frac{A}{B}E' - \frac{2E}{B} + \frac{\sqrt{(f^2-t^2)}\cdot\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t},$$

equazione che ci dà l' arco dell' iperbola espressso per mezzo di due archi d'ellissi. Si rammenti che le coordinate avendo l' origine nel centro, gli archi dell' ellissi incominciano dal centro, e sono nulli quando l' ascissa è nulla; di più, al secondo membro di quest' equazione non aggiungo costante, perchè essa si troverebbe zero. L' arco H si annulla

quando $f=t$, ed in questa stessa supposizione si annullano gli archi E, E' e tutte le altre quantità del secondo membro: quest' arco H annullandosi nell' ipotesi di $f=t$, cioè quando l' ascissa è f, incomincia dal vertice dell' iperbola.

§ 190. A comprendere lo spirito di queste dottrine credo necessario un esempio. Trovammo al § 180 un integrale espresso col mezzo di un arco d' iperbola, i cui semiassi erano 1 e $\frac{1}{\sqrt{3}}$, e l'ascissa $\frac{\sqrt{(1+3u^2)}}{2u}$. Questo integrale poi doveva avere i limiti $u=1$; $u=\frac{1}{2}$: vediamo ora come possa un tale arco esprimersi, mercè due archi di ellisse; e per non confondere questa lettera u con quella del § antecedente, noi la baratteremo in ω, e supporremo perciò che l' ascissa di quell' arco d' iperbola sia $\frac{\sqrt{(1+3\omega^2)}}{2\omega}$, che i limiti dell' integrale siano $\omega=1$; $\omega=\frac{1}{2}$; dal che segue che le ascisse corrispondenti all' estremità dell' arco saranno 1 e $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Se pertanto vogliamo che il nostro arco d' iperbola sia quello che al § antecedente rappresentammo con H, allora far dovremo $f=1$; $\sqrt{(e^2-f^2)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$$e=\frac{2}{\sqrt{3}};\ \frac{f^2\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{et}=\frac{\sqrt{(1+3\omega^2)}}{2\omega};\ t=\omega;$$

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}};\ b=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2};\ a^2+b^2=\frac{7}{6};\ a^2b^2=\frac{1}{12^2};$$

$A = B = \frac{1}{2}$; $c = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$; $y^2 = f^2 - t^2 = 1 - \omega^2$; $y = \sqrt{(1 - \omega^2)}$; $z^2 = e^2 - y^2 = \frac{1 + 3\omega^2}{3}$; $z = \frac{\sqrt{(1 + 3\omega^2)}}{\sqrt{3}}$;

$$(a^2 + b^2)u^2 - u^4 - a^2b^2 = u^2(1 - \omega^2);$$

$$u^4 + \left(1 - \omega^2 - \frac{7}{6}\right)u^2 = -\frac{1}{12^2};$$

$$u^4 - \left(\omega^2 + \frac{1}{6}\right)u^2 = -\frac{1}{12^2};$$

$$\frac{\sqrt{(f^2 - t^2)}\sqrt{(t^2 + e^2 - f^2)}}{t} = \frac{\sqrt{(1 - \omega^2)}\sqrt{(\omega^2 + \frac{1}{3})}}{\omega};$$

e da quest' equazione si avrà il valore dell' u conosciuto per mezzo dell' ω.

§ 191. Facciamo $u = \frac{1}{2}$, ed avremo

$$t = \frac{1}{2},\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad z = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}},\quad u^2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{24},$$

$$\frac{e\sqrt{(e^2 - z^2)}}{f} = 1,\quad \frac{a\sqrt{(a^2 - u^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\left(\frac{9}{24} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{21}}{24}\right)}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\sqrt{\left(1 - \omega^2\right)}\sqrt{\left(\omega^2 + \frac{1}{3}\right)}}{\omega} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Mercè questi valori la finale equazione del (§ 189) si cambierà in quest' altra

$H = \sqrt{3} + E' - 4E + \frac{1}{2}\sqrt{7}$; e ripeto che H rappresenta un arco d' iperbola, i di cui semiassi sono

$1, \frac{1}{\sqrt{3}}$, che incomincia dal vertice della iperbola, ed ha per ascissa $\frac{\sqrt{7}}{2}$, presa questa dal centro; la E rappresenta un arco d'ellisse, che ha per semiassi $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, che incomincia dall' origine delle coordinate, e corrisponde all' ascissa 1, contata questa dal centro; la E in fine rappresenta un altro arco d'ellisse, i cui semiassi sono $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}$, che incomincia all' origine delle coordinate e che ha per l' ascissa $\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{9}{24}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{21}}{24}\right)}}{\sqrt{2}}$, presa questa dal centro.

Ad avere dunque il valore di H è necessario trovare i valori numerici degli archi ellittici E, E'.

Incominciamo dal cercare quello dell' E'. A tal fine troviamo prima l' arco omologo nell' ellisse simile che ha per semiasse maggiore l' unità, e chiamando b il suo semiasse minore, per mezzo della proporzione $\frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} :: 1 : b$ si avrà $b=\frac{1}{2}$. Similmente per mezzo dell' altra proporzione $\frac{2}{\sqrt{3}} : 1 :: 1 : x$ si avrà $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, e questa sarà l' ascissa omologa nell' ellisse che ha per semiasse maggiore l' unità; e qui osservo che questa ascissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è l' eccentricità di questa ellisse, che ha per asse maggiore l' unità, come 1 è l' eccentricità nell' ellisse E', donde risulta

che in ambi i casi si cercano gli archi dell' ellisse corrispondenti all' eccentricità.

Trovata la lunghezza dell' arco corrispondente all' ascissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$ nell' ellisse che ha per semiassse maggiore l' unità, lo moltiplicheremo per $\frac{2}{\sqrt{3}}$, ed avremo allora il bramato arco E'.

Essendo l' eccentricità di una grandezza considerabile, conviene adoperare il metodo del (§ 186) e seguenti. Per questo conviene prima di tutto cercare l' angolo che si è chiamato ϕ. È chiaro per le cose dette in quel § che sarà $sen\,\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, onde $cos\,\phi = \frac{1}{2}$, e $tang\,\phi = \sqrt{3}$, cioè $\phi = 60°$; in oltre conviene esaminare la relazione tra $tang\,\phi$ e $\frac{1}{\sqrt{b}}$, cioè tra $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$; e siccome $\sqrt{3} > \sqrt{2}$, così si dovrà stabilire l' equazione $tang\,30° = \frac{1}{2}\,tang\,\phi'$, o sia $tang\,\phi' = 2\,tang\,30° = 2 \cdot 0{,}57735$, donde $\phi' = 49°, 6', 24''$: l' arco che noi cerchiamo adesso, e che ha per ascissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$, indichiamolo col segno $E(c,\ 60°)$ a tenore di quanto si prescrisse in quei §§, ed indichiamo con E_1 il quarto dell' ellisse cui quest' arco appartiene; avremo allora

$$E(c, 60°) = E_1 - E(c, 49°\cdot 6') + \frac{c^2\,sen\,49°\cdot 6' \cdot cos\,49°\cdot 6'}{\sqrt{(1 - c^2\,sen^2\,49°\cdot 6')}}.$$

§ 192. Ora $E_1 = \frac{2G}{\sqrt{(1+b)}} - 1 + b + 2H$

$$\left\{ - \frac{1}{\sqrt{(1+b)}} + \frac{1}{m} \log \frac{1 + \sqrt{(1+b)}}{\sqrt{b}} \right\},$$

ove converrà prendere i logaritmi ordinarj, giacchè si suppone $\frac{1}{m} = 2{,}3026$, converrà fare $b = \frac{1}{2}$ e sostituire in vece delle quantità H, G i loro valori dati al § 187, pel che si trova $E1 = 1{,}2116$.

Per avere l'arco $E(c, 49°\cdot 6')$ adopreremo la formola (a) del § 186, nella quale ponendo in vece del φ l'arco $49°\cdot 6'$, si avrà

$$E(c, 49°\cdot 6') = sen\, 49°\cdot 6'$$

$$+ \left\{\frac{1}{2} b^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2} b^4 \cdot + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} b^6 + \text{ec.}\right\} \times$$

$$\left\{-sen\, 49°\cdot 6' + \frac{1}{m} \log \frac{1 + sen\, 49°\cdot 6'}{cos 49°\cdot 6'}\right\} -$$

$$\frac{1}{2\cdot 4} b^4 \cdot \frac{1}{2} sen^3\, 49°\cdot 6' \cdot \{tang^2\, 49°\cdot 6' + 1\} + \text{ecc.},$$

ove converrà fare $b = \frac{1}{2}$, $sen\, 49°\cdot 6' = 0{,}75586$, $cos\, 49°\cdot 6' = 0{,}65474$; $tang\, 49°\cdot 6' = 1{,}1544$, ed in tal guisa si avrà

$$E(c, 49°\cdot 6') = 0{,}75586 + 0{,}139 \left\{-0{,}75586\right.$$

$$\left. + \frac{1}{m} \log \frac{1{,}75586}{0{,}65474}\right\} - \frac{1}{16^2}\cdot 0{,}75586^2 \{1{,}1544^2 + 1\}$$

$+$ ecc., o sia

$E(c, 49°\cdot 6') = 0{,}75586 + 0{,}139\cdot 0{,}23036 - 0{,}00223 \times 2{,}3327 = 0{,}78268$. Nella stessa maniera, osservando che $c^2 = \frac{3}{4}$, si troverà

$$\frac{c^2\, sen\, 49°\cdot 6'\, cos\, 49°\cdot 6'}{\sqrt{\{1 - c^2\, sen^2\, 49°\cdot 6'\}}} = 0{,}49096,$$ e quindi

$E(c, 60°) = 1,2116 - 0,7827 - 0,49096 = 0,9199 = 0,92$; onde trovare E' basta ora moltiplicare questo valore dell' arco $E(c, 60°)$ per $\frac{2}{\sqrt{3}}$ o sia per 1,1547, e si avrà $E' = 1,06$.

§ 193. Trovato il valore dell' arco E', cerchiamo quello dell' arco E; per questo si cerchi l'arco omologo nell' ellisse simile che ha per semiasse maggiore l' unità, e chiamando b il suo semiasse minore, la proporzione $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} :: 1 : b$ ci darà $b = 0,071797$: similmente coll' altra proporzione

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} : \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\left\{\frac{9}{24} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{21}}{24}\right\}}}{\sqrt{2}} :: 1 : x$$

si otterrà

$$x = \frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\left\{\frac{9}{24} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{21}}{24}\right\}}}{\sqrt{2}} = 0,81214,$$ che sarà

l' ascissa omologa nell' ellisse che ha per semiasse maggiore l' unità; converrà dunque trovare nell' ellisse che ha per semiasse maggiore l' unità, il valore dell' arco che corrisponde all' ascissa 0,81214, e questo valore moltiplicato per $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$ ci darà subito l' arco E.

Il valore dell' arco che corrisponde all' ascissa 0,81214 nell' ellisse, il cui semiasse è l' unità, si troverà operando come noi abbiamo fatto nel § antecedente.

Avremo pertanto $sen\,\phi = 0,81214$;

$cos\,\phi = 0,58346$; $tang\,\phi = \frac{0,81214}{0,58346}$, $\phi = 54° \cdot 18'$; e

giacchè in questo caso $tang\,\phi < \frac{1}{\sqrt{b}}$, come apparisce dall' essere 1,392 < 3,7321, perciò potremo direttamente fare uso della formola (*a*) del § 186. Avremo dunque

$$E(c, 54^\circ \cdot 18') = sen\, 54^\circ \cdot 18'$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} b^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} b^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} b^6 + \text{ec.} \right\} \times$$

$$\left\{ - sen\, 54^\circ \cdot 18' + \frac{1}{m} \log \frac{1 + sen\, 54^\circ \cdot 18'}{cos\, 54^\circ \cdot 18'} \right\} -$$

$$\frac{1}{2 \cdot 4} b^4 \cdot \frac{1}{2} sen^3\, 54^\circ \cdot 18' \{ tang^2\, 54^\circ \cdot 18' + 1 \} + \text{ec.},$$

ove facendo $b = 0{,}0071797$, $sen\, 54^\circ \cdot 18' = 0{,}81214$, $cos\, 54^\circ \cdot 18 = 0{,}58346$; $tang\, 54^\circ \cdot 18' = 1{,}392$, si avrà

$$E(c, 54^\circ \cdot 18') = 0{,}81214 + 0{,}00258$$

$$\left\{ - 0{,}81214 + \frac{1}{m} \log \frac{1{,}81214}{0{,}58346} \right\} - \frac{1}{16} \cdot 0{,}000027 \times$$

$$0{,}81214^3 \{ 1{,}392^2 + 1 \} + \text{ec.} = 0{,}81214 + 0{,}000828$$

$$- 0{,}0000026 = 0{,}813.$$

Il nostro arco adunque sarà.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) 0{,}813 = 1{,}07735 \cdot 0{,}813 = 0{,}8756.$$

Trovati in questo modo i valori dei due archi E, E', che trovansi nell' equazione

$H = \sqrt{3} + E' - 4E + \frac{1}{2} \sqrt{7}$, si avrà $H = 0{,}61$; tale sarà il valore numerico dell' integrale di quella formola che ci proponemmo.

CAPO VII.

Dei differenziali che possono ridursi alla forma dei differenziali degli archi ellittici e iperbolici.

§ 194. Prendiamo a considerare il differenziale $\frac{Pdx.}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+x^4)}}$ nel quale P è una funzione qualunque razionale della x. Se in questa facciamo $x=\frac{p+qy}{1+y}$, essendo p e q quantità costanti indeterminate, potremo sempre determinarle in guisa che spariscano dal denominatore le potenze impari della variabile; in fatti, sostituendo nel radicale (il quale d' ora in poi rappresenteremo con R) in vece della x il suo valore, avremo un' espressione di questa forma

$R=\sqrt{(a'+b'y+c'y^2+e'y^3+h'y^4)}:(1+y)^2$.

Se pertanto facciamo $b'=0$, $e'=0$, avremo $R=\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}:(1+y)^2$, e le quantità p e q saranno date dalle due equazioni $b'=0$, $e'=0$: troviamo quest' equazioni. Supponendo decomposta in fattori reali del secondo ordine la quantità $a+bx+cx^2+ex^3+x^4$, siano x^2-fx+g, $x^2-f'x+g'$ questi fattori, e basterà sostituire in ciascuno di essi il valore della x, ed eguagliare a zero i rispettivi coefficienti della prima potenza della variabile y che comporrà quei fattori medesimi: di fatto, si avranno così due equazioni $2pq-(p+q)f+2g=0$, $2pq-(p+q)f'+2g'=0$, dalle quali potremo ricavare i valori di pq e di $p+q$.

Questi valori saranno sempre reali, imperocchè f, g, f', g' sono quantità reali, quand' anche si trovassero dei fattori immaginarj nel quadrinomio.

Ora anche i valori di p e di q saranno sempre reali, e per conseguenza potremo sempre fare la prescritta riduzione; in fatti, acciò p, q siano quantità reali, bisognerà che $\frac{1}{4}(p+q)^2 > pq$, ovvero che $\frac{1}{4}(p+q)^2 - pq$, cioè $\frac{1}{4}(p-q)^2$ sia una quantità positiva.

Rappresentiamo con α, β, γ, δ le quattro radici dell' equazione $a + bx + cx^2 + ex^3 + x^4 = 0$ disposte per ordine di grandezza se sono reali, e sarà $f = \alpha + \beta$, $g = \alpha\beta$, $f' = \gamma + \delta$, $g' = \gamma\delta$. Sostituiti questi valori nell' equazioni qui sopra trovate, avremo

$$p + q = \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}{\alpha + \beta - \gamma - \delta};\ pq = \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - \gamma - \delta},$$

e quindi $\frac{1}{4}(p-q)^2 = \frac{1}{4}(p+q)^2 - pq =$

$\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}$, che è una quantità positiva, quando le quattro radici sono reali.

§ 195. Se α, β fossero immaginarie, esse avrebbero necessariamente questa forma

$\alpha = m + n\sqrt{(-1)}$, $\beta = m - n\sqrt{(-1)}$, e perciò $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = \{m - \gamma + n\sqrt{(-1)}\}\{m - \gamma - n\sqrt{(-1)}\}$ sarebbe un prodotto reale e positivo: nel modo stesso $(\alpha - \delta)(\beta - \delta)$ sarebbe anche un prodotto reale e positivo; dunque anco in questo caso $\frac{1}{4}(p-q)^2$ sarebbe una quantità positiva, ed i valori di p e q sarebbero reali.

Tutte e quattro le radici siano immaginarie, facciamo allora $\alpha = m + n\sqrt{(-1)}$, $\beta = m - n\sqrt{(-1)}$,

$\gamma = l + h\sqrt{(-1)}$, $\delta = l - h\sqrt{(-1)}$, e si avrà il prodotto

$(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) = \{m - l - (h - n)\sqrt{(-1)}\}\{m - l + (h - n)\sqrt{(-1)}\}$, che sarà una quantità reale e positiva; lo stesso essendo pel prodotto $(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)$, ne concluderemo che anco quando sono tutte e quattro le radici immaginarie, possiamo avere per p e q dei valori reali.

Se due delle quattro radici α, β, γ, δ saranno eguali, il polinomio sotto il radicale risulterà dal prodotto di un quadrato in un fattore trinomio, e si potrà portare fuori del segno radicale quel fattore quadrato; allora non trovandosi sotto questo segno potenze della variabile al di sopra della seconda, la formola apparterrà a quelle che abbiamo considerate al capo I.

Quando tutte e quattro le radici fossero eguali, svanirebbe allora il radicale, e la formola diventerebbe razionale di sua natura. Se poi la somma di due radici $\alpha + \delta$ fosse eguale alla somma delle due altre $\gamma + \beta$, si potrebbe allora decomporre il polinomio in due trinomj $x^2 - \lambda x + \alpha\delta$, $x^2 - \lambda x + \beta\gamma$, nei quali $\lambda = \alpha + \delta = \beta + \gamma$. In questo caso si elimi-nerebbero le potenze impari facendo $x = y + \frac{\lambda}{2}$.

Abbiamo considerati questi casi particolari delle radici, poichè in essi i valori di $p + q$ e di $p - q$ trovati superiormente divengono indeterminati, infiniti o nulli.

§ 196. Risulta da quanto abbiamo detto, che facendo $x = \frac{p + qy}{1 + y}$, e determinando opportunamente p, q, come è stato fatto qui sopra, si ha

$\sqrt{(a + bx + cx^2 + ex^3 + hx^4)} = \frac{\sqrt{(a' + c'y^2 + h'y^4)}}{(1 + y)^2}$, e

$dx = \frac{(q-p)\,dy}{(1+y)^2}$; e che per conseguenza possiamo sempre trasformare la formola

$\frac{Pdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+hx^4)}}$, ove P è una funzione razionale dell' x, in un' altra $\frac{Qdy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}}$, nella quale Q è una funzione razionale dell' y; così noi tratteremo dell' integrazione della seconda; anzi potremo ancora ridurla più semplice, facendo sì che il suo integrale dipenda da quello di una formola $\frac{Ldy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}}$ nella quale la funzione L non contenga che le potenze pari dell' y.

Per questo osservo che qualunque sia la funzione Q, essa non può avere altra forma che questa $\frac{A+By}{C+Dy}$, essendo rappresentate da A, B, C, D tante funzioni dell' y^2: ora

$$\frac{A+By}{C+Dy} = \frac{(A+By)\,(C-Dy)}{C^2-D^2y^2} = \frac{AC-BDy^2}{C^2-D^2y^2} + \frac{BC-AD}{C^2-D^2y^2}\,y;$$

dunque indicando con L il primo termine di questo secondo membro, e con Hy l' altro termine, si avrà

$$\int \frac{Qdy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}} = \int \frac{Ldy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}} + \int \frac{Hydy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}}.$$

Di queste due ultime formole integrali, la seconda si riduce più semplice facendo $y^2 = u$, ed

allora essa prende la forma $\int \frac{Udu}{\sqrt{(a' + c'u + b'u^2)}}$, nella quale U è una funzione razionale di u ed appartiene alla classe di quelle integrate al cap. II.

L' integrale dunque della nostra formola dipenderà da quello di $\frac{Ldy}{\sqrt{(a' + c'y^2 + h'y^4)}}$, ove L è una funzione razionale dell' y^2.

§ 197. Sia pertanto proposto il differenziale $\frac{Pdx}{\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}}$, nel quale P è una funzione razionale dell' x^2; cerchiamone l' integrale.

Supponiamo primieramente che P sia una funzione intiera, e rappresentiamola con $A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots + Mx^{2m}$; il nodo della quistione sarà dunque ridotto ad integrare $\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}}$, qualunque numero intiero e positivo sia m. Ora prendendo il differenziale della quantità

$x^{2m-3}\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}$, si avrà

$$dx\left\{(2m-3)x^{2m-4}\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)} + \frac{x^{2m-3}(b'x + 2c'x^3)}{\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}}\right\},$$

e però riducendo allo stesso denominatore ed integrando termine per termine, avremo, fatta $R = \sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}$,

$$x^{2m-3}R = (2m-3)a'\int\frac{x^{2m-4}dx}{R} + (2m-2)b'\int\frac{x^{2m-2}dx}{R} + (2m-1)c'\int\frac{x^{2m}dx}{R}.$$

Da questa equazione si ricava

$$\int \frac{x^{2m}\,dx}{R} = \frac{1}{(2m-1)c'} x^{2m-3} R -$$

$$\frac{(2m-2)b'}{(2m-1)c'} \int \frac{x^{2m-2}\,dx}{R} - \frac{(2m-3)a'}{(2m-1)c'} \times$$

$$\int \frac{x^{2m-4}\,dx}{R}\text{; e quindi facendo}$$

$$m=2,\ \int \frac{x^4\,dx}{R} = \frac{1}{3c'} xR - \frac{2b'}{3c'} \int \frac{x^2\,dx}{R} - \frac{a'}{3c'} \int \frac{dx}{R};$$

$$m=3,\ \int \frac{x^6\,dx}{R} = \frac{1}{5c'} x^3 R - \frac{4b'}{5c'} \int \frac{x^4\,dx}{R} - \frac{3a'}{5c'} \int \frac{x^2\,dx}{R}$$

ecc. ecc.

Si vede di qui che tutta la difficoltà si riduce ad integrare le formole $\int \frac{dx}{R}$, $\int \frac{x^2\,dx}{R}$, giacchè da esse dipende il valore di qualunque altra $\int \frac{x^{2m}\,dx}{R}$.

§ 198. Supponiamo in secondo luogo che P sia una funzione razionale qualunque di x^2. Cominceremo allora dal separare nel P la parte intiera che può esservi contenuta, e questa moltiplicata per dx e divisa per R, sarà trattata come abbiamo insegnato qui sopra. La parte fratta che resterà, si scomporrà nelle sue frazioni parziali secondo il numero dei fattori contenuti nel denominatore, ed avremo allora tanti termini della forma $\frac{N}{(x^2+n)^m}$, ove N ed n possono essere reali o immaginarj. Ciò fatto, tutta la difficoltà dell' integrazione sarà ridotta a quella

che hanno le formole simili ad $N\int\frac{dx}{(x^2+n)^m R}$,
m essendo un numero intiero positivo qualunque.

Onde aver l' integrale $\int\frac{dx}{(x^2+n)^m R}$, o almeno per far sì che dipenda da una formola, ove l' esponente m sia minore, differenziamo la quantità $\frac{x\mathrm{R}}{(x^2+n)^{m-1}}$, ed avremo

$$\left\{(x^2+n)\left(Rdx+\frac{x(2b'x+4c'x^3)\,dx}{2R}\right)-\right.$$
$$\left.2(m-1)\,x^2Rdx\right\}:(x^2+n)^m=$$
$$\frac{(x^2+n)\{a'+b'x^2+c'x^4+b'x^2+2c'x^4\}\,dx}{R\cdot(x^2+n)^m}-$$
$$\frac{2(m-1)\,(a'x^2+b'x^4+c'x^6)\,dx}{R\cdot(x^2+n)^m}:$$

ora diamo al numeratore di questa frazione la forma $\{A(x^2+n)^3+B(x^2+n)^2+C(x^2+n)+D\}\,dx$; la qual cosa sarà sempre possibile, ed avremo

$$\frac{\{A(x^2+n)^3+B(x^2+n)^2+C(x^2+n)+D\}\,dx}{(x^2+n)^m R}=$$
$$\frac{Adx}{(x^2+n)^{m-3}R}+\frac{Bdx}{(x^2+n)^{m-2}R}+\frac{Cdx}{(x^2+n)^{m-1}R}$$
$$+\frac{Ddx}{(x^2+n)^m R},$$ e quindi

$$\int\frac{Adx}{(x^2+n)^{m-3}R}+\int\frac{Bdx}{(x^2+n)^{m-2}R}+\int\frac{Cdx}{(x^2+n)^{m-1}R}$$

$$+\int\frac{Ddx}{(x^2+n)^m R}=\frac{xR}{(x^2+n)^{m-1}}.$$

Da quest' ultima equazione si ricava l' integrale $\int\frac{dx}{(x^2+n)^m R}$ dato per mezzo degl' integrali delle formole $\int\frac{dx}{(x^2+n)^{m-1}R}$, $\int\frac{dx}{(x^2+n)^{m-2}R}$, $\int\frac{dx}{(x^2+n)^{m-3}R}$; e di qui si vede che l' integrale di $\int\frac{dx}{(x^2+n)^2 R}$ sarà dato per mezzo degl' integrali $\int\frac{dx}{(x^2+n)R}$, $\int\frac{dx}{(x^2+n)^0 R}$, $\int\frac{dx}{(x^2+n)^{-1}R}$, ovvero $\int\frac{dx}{(x^2+n)R}$; $\int\frac{dx}{R}$; $\int\frac{(x^2+n)dx}{R}$; e generalmente parlando, concluderemo che da queste tre formole dipenderà l'integrale di qualunque altra $\int\frac{dx}{(x^2+n)^m R}$.

Dunque qualunque sia la funzione P dell' x^2, purchè sia razionale, l' integrale di questa formola $\frac{Pdx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}$ dipenderà da queste tre

$$(I)\ \ldots \int \frac{dx}{(x^2+n)\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}},$$

$$(II)\ \ldots \int \frac{dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}},$$

$$(III)\ \ldots \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}.$$

I tre integrali (I), (II), (III) sono chiamati da Legendre trascendenti ellittiche, e volendo vedere una completa teorica rispetto ad essi, si legga una di lui Memoria sopra tal soggetto, pubblicata nel 1793.

§ 199. Incominciamo dalla formola (II) che è la più semplice di tutte, e consideriamone i diversi casi che presentano i diversi segni dei coefficienti a', b', c'. Indicando con a', b', c' tante quantità positive, ecco gli otto casi che ci danno le diverse combinazioni dei segni sotto il radicale:

$$1^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}, \qquad 2^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(a'+b'x^2-c'x^4)}}$$

$$3^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(a'-b'x^2-c'x^4)}}, \qquad 4^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(-a'-b'x^2-c'x^4)}}$$

$$5^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(-a'-b'x^2+c'x^4)}}, \qquad 6^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(-a'+b'x^2+c'x^4)}}$$

$$7^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(a'-b'x^2+c'x^4)}}, \qquad 8^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(-a'+b'x^2-c'x^4)}}.$$

Tralasceremo il quarto, poichè esso è immaginario, e gli altri sette sono compresi in queste quattro formole:

I^a .... $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4-m)}}$, k, m essendo positivi.

II^a.... $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}$, m essendo positivo, k positivo o negativo.

III^a... $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}$, m positivo, k qualunque.

IV^a ... $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}$, m positivo, k qualunque.

Per la prima formola, diamo al nostro radicale questa forma $\sqrt{\left\{\frac{k^2}{4}-m-\left(x^2-\frac{k}{2}\right)^2\right\}}$, e concluderemo che non solo debb' essere k positivo, ma di più $\frac{k^2}{4}>m$, e ciò perchè non compariscano gli immaginarj.

Sarà dunque

$$\sqrt{(kx^2-x^4-m)}=\sqrt{\left\{\left(\frac{k+\sqrt{(kk-4m)}}{2}-x^2\right)\left(x^2-\frac{k-\sqrt{(kk-4m)}}{2}\right)\right\}};$$ e facendo

$\frac{k+\sqrt{(kk-4m)}}{2}=aa$, $\frac{k-\sqrt{(kk-4m)}}{2}=bb$, si avrà

$\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4-m)}}=\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}\cdot\sqrt{(xx-bb)}}$, ove aa, bb saranno quantità positive, e di più sarà $a>b$.

Onde integrare il differenziale

$\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}\cdot\sqrt{(xx-bb)}}$, facciamo

$$\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}\cdot\sqrt{(xx-bb)}}=\frac{Ax^2dx}{\sqrt{(aa-xx)}\cdot\sqrt{(xx-bb)}}$$

$$+\frac{Bdx\cdot\sqrt{(x^2-bb)}}{\sqrt{(aa-xx)}},$$ e determiniamo i coefficienti A, B in modo che quest' equazione sia soddisfatta. Perciò si avrà tra A, B quest' equazione

$1=Ax^2+Bx^2-Bb^2$ che ci dà $B=-\frac{1}{bb}$,

$A=-B=\frac{1}{bb}$, e per conseguenza

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}\cdot\sqrt{(xx-bb)}}=\frac{1}{bb}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(aa-xx)}\cdot\sqrt{(xx-bb)}}$$

$$-\frac{1}{bb}\int\frac{dx\sqrt{(xx-bb)}}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

Il primo di questi due termini è il prodotto {§ 176, for. (1)} del fattore costante $-\frac{1}{bb}$ per un arco di ellisse di cui a, b sono i semiassi, e l' ascissa contata dal centro è $\frac{a\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa-bb)}}$.

Rispetto al secondo, poniamo $xx-bb=zz$, e fatto, per abbreviare, $aa-bb=cc$, si trova

$\frac{dx\sqrt{(xx-bb)}}{\sqrt{(aa-xx)}}=\frac{zzdz}{\sqrt{(zz+bb)}\cdot\sqrt{(cc-zz)}}$. Ora poniamo anche $\frac{\sqrt{(zz+bb)}\cdot\sqrt{(cc-zz)}}{z}=t$, ed avremo

$$dt=\frac{-zzdz}{\sqrt{(zz+bb)}\cdot\sqrt{(cc-zz)}}-\frac{b^2c^2dz}{z^2\sqrt{(z^2+b^2)}\cdot\sqrt{(cc-zz)}};$$

e quindi integrando

$$\int\frac{zzdz}{\sqrt{(zz+bb)}\cdot\sqrt{(cc-zz)}}=\int\frac{dx\sqrt{(x^2-b^2)}}{\sqrt{(aa-xx)}}=-t-$$

$$\int\frac{b^2c^2dz}{z^2\sqrt{(zz+bb)}\cdot\sqrt{(cc-zz)}}=-\frac{\sqrt{(zz+bb)}\cdot\sqrt{(cc-zz)}}{z}$$

$+\int\frac{-b^2c^2dz}{z^4\sqrt{(zz+bb)}\cdot\sqrt{(cc-zz)}}$: la prima parte di quest' espressione è algebratica, e la seconda dipende dalla rettificazione dell' iperbola {§ 178, for. (4)}.

§ 200. La formola II^a $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}$ si riduce facilmente alla I^a. In fatti, osservando che la quantità kx^2-x^4+m si scompone nei due fattori $\frac{k+\sqrt{(k^2+4m)}}{2}-x^2$, $x^2+\frac{\sqrt{(k^2+4m)}-k}{2}$, cui possiamo dare questa forma a^2-x^2, x^2+b^2, avremo

$$\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}=\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}\cdot\sqrt{(x^2+b^2)}}:$$

le quantità a^2, b^2 sono sempre positive; e poi $a^2>b^2$ se k è positivo, $a^2<b^2$ se k è negativo.

Ora si faccia $x^2+b^2=y^2$, e ponendo $a^2+b^2=c^2$, si avrà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}=\frac{dy}{\sqrt{\{(c^2+b^2)y^2-y^4-b^2c^2\}}};$$

espressione della stessa forma della formola I^a.

Per la formola III^a $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}$ facciamo $x=\frac{\sqrt{m}}{s}$, ed avremo $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}=-\frac{ds}{\sqrt{(ks^2-s^4+m)}}$, che è la formola II^a.

§ 201. In fine prendiamo ad integrare la formola IV^a $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}$.

Se $\frac{k^2}{4}=m$, la formola si riduce razionale; così a noi appartengono i casi nei quali $\frac{k^2}{4}>m$, ovvero $<m$.

Quando $\frac{k^2}{4}>m$, il polinomio si scompone in questi due fattori binomj reali $x^2+\frac{k+\sqrt{(k^2-4m)}}{2}$, $x^2+\frac{k-\sqrt{(k^2-4m)}}{2}$, che noi possiamo rappresentare con x^2+f, x^2+g, le quantità f, g essendo contemporaneamente positive o negative, secondo che k è positivo o negativo: avremo dunque da integrare la formola $\frac{dx}{\sqrt{(x^2+f)}\cdot\sqrt{(x^2+g)}}$.

Supponiamo primieramente che le due quantità f e g siano positive, allora si ha $f>g$. Facciamo $x^2+g=s^2$, dal che ne viene $x=\sqrt{(s^2-g)}$, $dx=\frac{sds}{\sqrt{(s^2-g)}}$, $\sqrt{(x^2+f)}=\sqrt{(s^2+f-g)}=\sqrt{(s^2+h)}$, fatta $h=f-g$; avremo allora

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2+f)}\sqrt{(x^2+g)}}=\frac{ds}{\sqrt{(s^2-g)}\cdot\sqrt{s^2+h)}},$$ e facendo anche $s=\frac{\sqrt{gh}}{y}$, troveremo

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2+f)}\cdot\sqrt{(x^2+g)}}=-\frac{dy}{\sqrt{\{(h-g)y^2-y^4+gh\}}},$$

che s' integra come nella formola II^a.

Se le quantità f e g sono negative, allora $g>f$ e la formola da integrarsi diviene

$\frac{dx}{\sqrt{(x^2-f)}\cdot\sqrt{(x^2-g)}}$. Poniamo in questo caso $x^2-f=s^2$, $g-f=h$, e si avrà subito la trasformata $\frac{ds}{\sqrt{(s^2+f)}\cdot\sqrt{(s^2-h)}}$, la quale si riduce a $\frac{-dy}{\sqrt{\{(f-h)y^2-y^4+fh\}}}$, facendo $s=\frac{\sqrt{fh}}{y}$; questa poi s' integra egualmente come la formola II^a.

Quando è $\frac{k^2}{4}<m$, il polinomio non può scomporsi in due fattori reali binomj della forma x^2+M: ecco allora come potremo avere l' integrale della formola $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}$.

Facciamo $\frac{kx^2+x^4+m}{x^2}=y^2$, e ci verrà

$x^2=-\frac{(k-y^2)}{2}\pm\frac{\sqrt{\{(k-y^2)^2-4m\}}}{2}$; quindi

$xdx=\frac{ydy}{2}\mp\frac{ydy\,(k-y^2)}{2\sqrt{\{(k-y^2)^2-4m\}}}$, ed in conseguenza

$$\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}=\frac{dx}{xy}=\frac{xdx}{x^2y}=\frac{\pm dy}{\sqrt{\{(k-y^2)^2-4m\}}},$$

ovvero $=\frac{dy}{\sqrt{(k^2-2ky^2+y^4-4m)}}$: poniamo ora

$y = \frac{1}{s}$, e si avrà $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2 + x^4 + m)}} =$

$$\frac{\mp ds}{\sqrt{(4m - k^2)} \cdot \sqrt{\left(\frac{-2ks^2}{4m - k^2} - s^4 + \frac{1}{4m - k^2}\right)}},$$ che si riferisce alla formola II^a.

§ 202. La formola (III) del (§ 198) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}}$ presenta ancora essa diversi casi secondo le diverse combinazioni dei segni che hanno i termini del trinomio sotto del radicale, ed è facile vedere che tutti questi casi si riducono alle quattro formole seguenti:

I^a .... $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 - x^4 - m)}}$, k, m essendo positivi.

II^a.... $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}$, m positivo, k qualunque.

III^a... $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 + x^4 - m)}}$, m positivo, k qualunque.

IV^a... $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 + x^4 + m)}}$, m positivo, k qualunque.

La formola I^a s' integra per mezzo di un arco di ellisse (§ 176), e la III^a per mezzo di un arco d' iperbola (§ 178); restano a trattarsi la II^a e la IV^a.

Per integrare il differenziale $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}$ io differenzio la quantità $\frac{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}{x}$, e trovo

$$d\left\{\frac{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}{x}\right\}=-\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}-$$

$$\frac{mdx}{x^2\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}\text{ ; ho dunque}$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}=-\frac{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}{x}$$

$$+\int\frac{-mdx}{x^2\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}.$$

Il primo termine di questo secondo membro è una quantità algebratica, e l' altro è un arco d' iperbola, i di cui assi a, b sono dati mercè l' equazioni $aa-bb=k$, $a^2b^2=m$.

§ 203. Veniamo alla formola IV^a $\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}$.

Se $m=\frac{k^2}{4}$, la formola diviene razionale, e non occorre considerarla. Se $k^2>4m$, allora il differenziale da integrarsi prende la forma $\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+f)}\cdot\sqrt{(x^2+g)}}$, essendo positive le quantità f e g se è positiva k, e negative se questa è negativa.

Quando f e g sono positive, allora $f>g$, e facendo $x^2+g=s^2$, $f-g=h$, sarà h quantità positiva, e si avrà la trasformata $\frac{s^2ds}{\sqrt{(s^2-g)}\cdot\sqrt{(s^2+h)}}$ $-\frac{gds}{\sqrt{(s^2-g)}\cdot\sqrt{(s^2+h)}}$; il primo termine della quale rappresenta il differenziale (§ 178) di un arco d' iperbola, ed il secondo, facendovi $s=\frac{\sqrt{gh}}{y}$,

divienc $\frac{gdy}{\sqrt{\{(h-g)y^2-y^4+gh\}}}$, e combina con la formola II^a del (§ 199).

Quando f e g fossero negative, allora $g>f$, e facendo $x^2-f=s^2$, $g-f=h$ quantità positiva, $s=\frac{\sqrt{fh}}{y}$, si avranno risultamenti simili ai precedenti.

Sia ora $k^2<4m$, e poniamo $\frac{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}{x}=y$:

avremo $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}=\frac{dy}{\sqrt{\{(k-y^2)^2-4m\}}}$.

Ora quella supposizione ci dà

$x^2=-\frac{(k-y^2)}{2}\pm\sqrt{\left\{\frac{(k-y^2)^2-4m}{4}\right\}}$, e perciò,

fatte le opportune riduzioni, si avrà

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}=\frac{dy}{2}+\frac{y^2dy}{2\sqrt{(k^2-2ky^2+y^4-4m)}}$$
$$-\frac{kdy}{2\sqrt{(k^2-2ky^2+y^4-4m)}}.$$

In questo secondo membro, l' integrale del primo termine è una quantità algebratica, quello del secondo (giacchè k^2-4m è una quantità negativa) dipende dalla rettificazione dell' iperbola, e quello del terzo è dato dalla formola III^a del (§ 202).

§ 204. La formola (I^a) del (§ 198)

$\frac{dx}{(x^2+n)\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}$ è la più difficoltosa a trattarsi in generale per qualunque valore abbia n reale o immaginario; nel caso però che n sia nullo, l' integrale di essa dipende dalla rettificazione delle sezioni coniche.

In fatti facciamo $n=0$, e considerando tutte le formole che possono dare le diverse combinazioni dei segni della quantità sotto il radicale, si hanno, come ai §§ antecedenti, queste quattro formole:

$$\text{I}^{\text{a}} \ldots \frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2-x^4-m)}}, \quad m,\ k \text{ sono positivi.}$$

$$\text{II}^{\text{a}} \ldots \frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}, \quad m \text{ positivo},\ k \text{ qualunque.}$$

$$\text{III}^{\text{a}} \ldots \frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}, \quad m \text{ positivo},\ k \text{ qualunque.}$$

$$\text{IV}^{\text{a}} \ldots \frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}, \quad m \text{ positivo},\ k \text{ qualunque.}$$

L' integrale della prima di queste formole dipende dalla rettificazione dell' ellisse, e quello della seconda da quella dell' iperbola.

Per la terza prendiamo il differenziale di

$\frac{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}{x}$, e si avrà

$$d\left(\frac{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}{x}\right)=\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}$$

$$+\frac{mdx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4-m)}};\ \text{quindi}$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}=\frac{1}{m}\,\frac{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}{x}$$

$$-\frac{1}{m}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}:$$

il primo termine di questo secondo membro è una quantità algebratica, e l' altro è la formola III^{a} del § 202.

Per la quarta facciamo $x = \frac{\sqrt{m}}{s}$, ed avremo

$\frac{dx}{x^2 \sqrt{(kx^2 + x^4 + m)}} = - \frac{s^2 ds}{m \sqrt{(ks^2 + s^4 + m)}}$, che è la quarta formola del (§ 202).

§ 205. Alle tre formole integrali (§ 198) siamo giunti cercando l' integrale di

$\frac{Pdx}{\sqrt{(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4)}}$, nella quale P è una funzione qualunque razionale della x: ora vi sono delle formole le quali, quantunque all' aspetto più complicate, pure, in virtù di adattate sostituzioni, possono ridursi a quella: ne indicheremo alcune.

Il differenziale Xdx nel quale X è una funzione della x e di quel radicale che indicheremo per R, si può sempre integrare per mezzo dell' integrazione di $\frac{Pdx}{R}$. In fatti X dovendo avere necessariamente la forma $\frac{M + LR}{K + QR}$, ove M, L, K, Q sono tante funzioni razionali della x, si vedrà chiaramente che potremo fare questa riduzione

$$\frac{M + LR}{K + QR} = \frac{(M + LR)(K - QR)}{(K + QR)(K - QR)} = \frac{MK - LQR^2}{K^2 - Q^2R^2} -$$

$$\frac{(QM - KL) R}{K^2 - Q^2R^2} = \frac{MK - LQR^2}{K^2 - Q^2R^2} - \frac{(QM - KL)R^2}{K^2 - Q^2R^2} \cdot \frac{1}{R}.$$

Ora rappresentiamo con N il primo termine di questo secondo membro, e con P il coefficiente di $\frac{1}{R}$, ed avremo $\frac{M + LR}{K + QR} = N + \frac{P}{R}$: quindi

$$Xdx = Ndx + \frac{Pdx}{R}.$$

Il differenziale della formola

$\frac{Pdx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4+e'x^6)}}$, nella quale P è una funzione razionale della x, si riduce anche alla forma

$\frac{Tdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}$. In fatti facendovi $x^2=z$, e supponendo che P si cangi in $M+N\sqrt{z}$, si avrà

$$\frac{Pdx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4+e'x^6)}}=\frac{(M+N\sqrt{z})\,dz}{2\sqrt{z}\cdot\sqrt{(a'+b'z+c'z^2+e'z^3)}}=$$

$$\frac{Mdz}{2\sqrt{(a'z+b'z^2+c'z^3+e'z^4)}}+\frac{Ndz}{2\sqrt{(a'+b'z+c'z^2+e'z^3)}}.$$

Queste due quantità si riducono alla formola

$\frac{Tdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}$, facendo per la prima $a=0$, e per la seconda $f=0$.

CAPO VIII.

Integrali degli ordini superiori ed integrali raddoppiati.

§ 206. Per avere l'effettivo valore di $\int^n Xdx^n$; cioè dell' integrale *ennesimo* di Xdx^n, far conviene un numero n d' integrazioni del differenziale Xdx^n; così essendo, per esempio, $\int^3 Xdx^3=\int dx\int dx\int Xdx$, se poniamo

$\int Xdx=M+C$; $\int Mdx=N+C'$; $\int Ndx=L+C''$,

si avrà

$\int^3 Xdx^3=\int dx\int(M+C)\,dx=\int(N+Cx+C')\,dx=L+\frac{C}{2}x^2+C'x+C''$; ove C, C', C'' sono le tre costanti arbitrarie.

Lo stesso si dica per gl' integrali di un più alto ordine. Per far qualche applicazione di queste integrazioni proponiamoci da sommare la serie

$$\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}$$
$+$ ecc.

Si moltiplichi il primo termine per x^{m+1}, il secondo per x^{m+2}, il terzo per x^{m+3} ecc., e si eguagli allora quella serie ad y; avremo

$$y=\frac{x^{m+1}}{m(m+1)}+\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+\frac{x^{m+3}}{(m+2)(m+3)}$$
$+$ ecc.

Questa serie, facendovi $x=1$, cangiasi nella proposta; così y rappresenta la somma della nostra serie, purchè vi si faccia $x=1$.

Differenziamo due volte quell' equazione, ed avremo

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=x^{m-1}+x^m+x^{m+1}+x^{m+2}+\text{ecc.}$$

$$=\frac{x^{m-1}}{1-x}\text{; dunque}$$

$$y=\int^2\frac{x^{m-1}}{1-x}dx^2=\int dx\int\frac{x^{m-1}}{1-x}dx.$$

Per avere la somma cercata dovremo, terminate le integrazioni, fare $x=1$ nel valore dell' y.

Integrando a parti, si avrà $y=x\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x}-\int\frac{x^m\,dx}{1-x}$; e facendo $x=1$ fuori del segno sommatorio, verrà

$$y=\int\frac{x^{m-1}\,dx-x^m dx}{1-x}=\int x^{m-1}\,dx=\frac{x^m}{m};$$

onde avremo

$$y=\frac{1}{m}=\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}$$
$$+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\text{ecc.}$$

Sia $m=1$, e si troverà $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}$ $+$ ecc. $=1$.

Debbasi sommare quest' altra serie

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$
$$+\frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)}+\text{ecc.}$$

Poniamo $y=\frac{x^{m+2}}{m(m+1)(m+2)}$ $+\frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}+$ ecc., e differenziando otterremo

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=x^{m-1}+x^m+x^{m+1}+x^{m+2}+\text{ecc.}$$
$$=\frac{x^{m-1}}{1-x},\text{ e quindi}$$

$$y=\int^3\frac{x^{m-1}}{1-x}dx^3=\int dx\int dx\int\frac{x^{m-1}}{1-x}dx;$$

e se terminate le integrazioni faremo $x = 1$, il valore della y ci darà la somma della serie proposta: ora integrando a parti, si trova

$$y = \frac{x^2}{2}\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x} - \frac{1}{2}\int\frac{x^{m+1}dx}{1-x} - x\int\frac{x^m dx}{1-x} + \int\frac{x^{m+1}dx}{1-x},$$

e facendo $x = 1$ fuori del segno sommatorio,

$$y = \frac{1}{2}\int\frac{x^{m-1}(1-x^2)\,dx}{1-x} - \int\frac{x^m(1-x)\,dx}{1-x},$$

$$y = \frac{1}{2}\int x^{m-1}dx + \frac{1}{2}\int x^m dx - \int x^m dx,$$

$$y = \frac{1}{2}\left\{\int x^{m-1}dx - \int x^m dx\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+1}}{m+1}\right);$$

questo valore della y diventa $= \frac{1}{2m(m+1)}$, quando $x = 1$; dunque $\frac{1}{2m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)(m+2)}$

$$+ \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$+$ ecc.

Nella stessa maniera potrebbero trovarsi le somme delle serie

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$+ \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+ \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} + \text{ecc.}$$

e sarebbe $\frac{1}{3m(m+1)(m+2)}$ la somma della prima,

$\frac{1}{4m(m+1)(m+2)(m+3)}$ la somma della seconda,

e così delle altre.

§ 207. Se con z noi indichiamo una funzione di due variabili x, y, abbiamo detto che $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n}\right) dx^m\,dy^n$ rappresenta il differenziale parziale $(m+n)^{esimo}$ della stessa z presa m volte rispetto alla x, e n volte rispetto alla y. Ora dato un differenziale $Pdx^m\,dy^n$, si può cercare quella funzione z, il cui differenziale parziale $(m+n)^{esimo}$ sia appunto $Pdx^m\,dy^n$, di modo che debba aversi $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n}\right) dx^m\,dy^n = Pdx^m\,dy^n$, ovvero $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n}\right) = P$. Questa funzione z si chiama *l'integrale* $(m+n)^{esimo}$ di $Pdx^m\,dy^n$ preso m volte rispetto alla x, e n volte rispetto alla y, e si scrive così, $z = \int^{m+n} Pdx^m\,dy^n$; di modo che queste due equazioni $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n}\right) = P$, $z = \int^{m+n} Pdx^m\,dy^n$

significano in conclusione la stessa cosa: sono due equazioni *simboliche*, delle quali data l'una, l'altra ne viene per conseguenza. Il dx^m, dy^n che trovasi in $\int^{m+n} Pdx^m dy^n$ sono due indici destinati a svanire dal calcolo dopo fatte le integrazioni; essi servono ad indicarci quante sono le integrazioni. Nel nostro caso dobbiamo integrare m volte rispetto alla variabile x, e n volte rispetto alla y.

Le formole, come questa $\int^{m+n} Pdx^m dy^n$, si chiamano *integrali raddoppiati*, perchè dobbiamo integrare rispetto a due variabili: per la stessa ragione le formole, come $\int^{m+n+l} Pdx^m dy^n du^l$, sopra le quali potrebbero farsi riflessioni simili a quelle fatte sulle prime, si chiamano *integrali triplicati*, perchè debbono eseguirsi le integrazioni rispetto a tre variabili, e così via via.

§ 208. Supponiamo prima che le variabili x, y, u ecc. siano indipendenti tra loro, poi considereremo il caso in cui tra queste variabili vi siano alcune relazioni.

Per trovare l' effettivo valore di $\int\int Pdxdy$ conviene integrare due volte l'una rispetto alla x, l' altra rispetto alla y, ed è poi indifferente l'ordine da seguirsi nel fare queste integrazioni: si può incominciare prima dalla variabile x, ed in appresso integrare rispetto alla y, e *vice versa*; essendo poi queste due variabili indipendenti tra loro; considereremo costante la y allora quando s' integrerà rispetto alla x, e dopo, costante la x quando si prenderà l' integrale rispetto all' y; il tutto conseguita dalle cose dette per la differenziazione. Incominciando dall' integrazione rispetto alla x, e rappresentando con $M+C$ l'integrale $\int Pdx$ in questa ipotesi, avremo

$$\int\int Pdxdy = \int dy \int Pdx = \int dy\,(M+C) = \int Mdy + \int Cdy.$$

Ora sia $N+C'$ l'integrale di Mdy rispetto alla y, e si otterrà

$$\int\int Pdxdy = \int dy \int Pdx = N + Cy + C'.$$

Le quantità C, C' sono le due costanti arbitrarie che hanno introdotte le integrazioni. La C, che è l'arbitraria allorchè s' integra rispetto alla x, sarà una funzione arbitraria della y, e perciò $\int Cdy$ potrà rappresentarsi con una funzione arbitraria $\phi\,(y)$ della y.

Nel modo stesso la C' potrà essere una funzione arbitraria $\Psi\,(x)$ della x, e perciò faremo

$$\int\int Pdxdy = N + \phi\,(y) + \Psi\,(x).$$

Saremmo giunti allo stesso risultamento, incominciando l'integrazioni dalla variabile y.

§ 209. Facciamo qualche esempio.

Vogliasi il valore dell' integrale $\int\int \frac{dxdy}{xx+yy}$.

Incominciando ad integrare rispetto alla y, avremo

$$\int\int \frac{dxdy}{xx+yy} = \int dx \int \frac{dy}{xx+yy}.$$

Ma $\int \frac{dy}{xx+yy} = \frac{1}{x}\, Arc\ tang\ \frac{y}{x} + \phi\,(x)$; dunque

$$\int\int \frac{dxdy}{xx+yy} = \int \frac{dx}{x}\, Arc\ tang\ \frac{y}{x} + \phi\,(x) + \Psi\,(y).$$

Incominciando dalla variabile x, avremmo trovato

$$\int\int \frac{dxdy}{xx+yy} = \int dy \int \frac{dx}{xx+yy} = \int \frac{dy}{y}\, Arc\ tang\ \frac{x}{y}$$
$$+ \phi\,(x) + \Psi\,(y).$$

Ecco come potremo riconoscere la medesimità di questi due integrali.

Rappresentato con $\frac{\pi}{2}$ un angolo retto, è

$Arc\ tang\ \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} - Arc\ tang\ \frac{y}{x}$; ora

$Arc\ tang\ \frac{y}{x} = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \frac{y^7}{7x^7} +$ ecc., dunque

$$\int \frac{dx}{x} Arc\ tang\ \frac{y}{x} = -\frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{ec.}$$

E, poi

$$\int \frac{dy}{y} Arc\ tang\ \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} ly - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} \cdot$$

— ecc.

Il primo termine $\frac{\pi}{2} ly$ di questo secondo membro, essendo una funzione della y soltanto, potrà considerarsi contenuto entro la funzione arbitraria, e quindi i due integrali divengono lo stesso.

Quando le integrazioni possono effettuarsi senza ricorso ad artifizio di trasformazione, la medesimità si manifesta subito; per esempio:

$$\int\int ax^m y^n dxdy = a\int dx \int x^m y^n dy$$

$$= a\int dx \left(\frac{x^m y^{n+1}}{n+1} + C \right) = \frac{ax^{m+1} y^{n+1}}{(m+1)(n+1)}$$

$$+ \phi(x) + \Psi(y).$$

$$\int\int ax^m y^n dxdy = a\int dy \int x^m y^n dx$$

$$= a\int dy \left(\frac{x^{m+1} y^n}{m+1} + C \right) = \frac{ax^{m+1} y^{n+1}}{(m+1)(n+1)}$$

$$+ \phi(x) + \Psi(y).$$

In generale, per avere l' integrale di un differenziale parziale $Pdx^m dy^n$, dovremo fare m integrazioni rispetto alla x, e n rispetto alla y; ma

possiamo tenere che strada si vuole nel fare queste operazioni. Ogni volta però che si fa un' integrazione rispetto alla x, aggiungeremo una funzione arbitraria della y, ed ogni volta che integreremo rispetto alla y, aggiungeremo un' arbitraria funzione dell' x; onde terminate tutte le integrazioni, si dovrà trovare un numero $m+n$ di arbitrarie, tra le quali vi saranno n funzioni della x, e m funzioni della y.

È facilissimo estendere queste dottrine agl' integrali triplicati.

§. 210. Nell' integrazioni del differenziale parziale $Pdxdy$ abbiamo supposto le variabili x, y indipendenti. In virtù di questa ipotesi abbiamo potuto risguardare una di queste variabili come costante, allora che s' integrava rispetto all' altra, e stabilire che le due arbitrarie portate dall' integrazioni, esser poteano rispettivamente funzioni della x e della y.

Questa stessa indipendenza dà origine ad una importantissima considerazione sopra l' integrale duplicato $\int\int Pdxdy$. Ottenuta la funzione $F(x, y)$, la quale esprime quest' integrale, supponiamo che esso debba essere esteso rispetto alla variabile x sino a $x=b$, e rispetto alla y sino ad $y=\beta$ senza che d'altronde vi sia alcuna dipendenza tra b e β; basterà per questo porre $x=b$, $y=\beta$ nella funzione $F(x, y)$, ed avremo allora $\int\int Pdxdy=F(b, \beta)$.

Ora si può giungere al medesimo risultamento ancora in quest' altra maniera: cangiata la formola $\int\int Pdxdy$ in $\int dx \int Pdy$, si cominci al solito a cercare l' integrale di Pdy nella supposizione della x costante, e sia questo integrale $f(x, y)$; ci resterà dunque ad integrare $\int f(x, y)\, dx$ nella supposizione della y costante. Estendiamo l' integrale $f(x, y)$ fino al suo termine, cioè insino ad $y=\beta$; sarà $\int Pdy=f(x, \beta)$, e resterà a cercarsi il valore di $\int f(x, \beta)\, dx$, il quale ci darà l' integrale richiesto, di già esteso rispetto alla y sino al suo termine. Essendo β una quantità costante ed indipendente

dalla x, nella stessa guisa che era $\int f(x, y) dx = F(x, y)$ integrando nella supposizione della y costante, così sarà $\int f(x, \beta) dx = F(x, \beta)$; facciamovi $x = b$, ed avremo $F(b, \beta)$ per rappresentare l' integrale della formola esteso sino al limite ov' è $x = b$, $y = \beta$.

Quindi concluderemo che essendo le due variabili indipendenti, è la stessa cosa sostituire $x = b$, $y = \beta$ nell' integrale duplicato $\int\int Pdxdy$, dopo aver eseguite le due integrazioni, ovvero sostituire $y = \beta$ dopo avere integrato rispetto alla y, e $x = b$ dopo l' integrazione rispetto alla x.

Ma se le due variabili x, y hanno tra loro una tal relazione per la quale nel fine e nel principio dell' integrale i valori della y debbano essere determinati per quelli della x, essendo ivi, cioè, una di queste variabili funzione dell' altra, per esempio y funzione della x, allora la faccenda è assai diversa. Integrata la formola $Pdxdy$ prima rispetto alla y, come se le variabili fossero indipendenti, ed ottenuta una funzione $F(x, y) + C = \int Pdy$, conviene, avanti di fare la seconda integrazione, estendere quest' integrale sino ai punti ove la y abbia quello stabilito rapporto con la x; imperocchè l' estensione dell' integrale rispetto alla y dipendendo dalla x, dee considerarsi come una funzione della x, e per conseguenza debbe aver che fare qualche cosa nella seconda integrazione rispetto alla x. Per questo supponiamo che al principio dell' integrale debba essere $y = \phi(x)$, ed alla fine $y = \phi'(x)$: essendo C un' arbitraria funzione della x, determiniamola in modo che l' integrale abbia il principio voluto, e sarà $C = -F\{x, \phi(x)\}$; onde data la conveniente estensione all' integrale rispetto alla y, si avrà

$$\int Pdy = F\{x, \phi'(x)\} - F\{x, \phi(x)\}.$$

Se l' origine dell' integrale fosse stata ove $y = \phi'(x)$, e la fine ove $y = \phi(x)$, avremmo avuto lo stesso risultamento ma col segno contrario. Il segno

è indifferente alla quantità o grandezza d' un integrale definito.

Indichiamo questa funzione della x con $\Psi(x)$, ed avremo $\int\int P dx dy = \int \Psi(x)\, dx$, che s' integrerà con le regole ordinarie.

§ 211. Rendiamo per mezzo di esempj più chiara questa dottrina.

Abbiasi il differenziale parziale
$dxdy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$, e se ne voglia l' integrale doppio $\int\int dxdy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$ nella supposizione che rispetto alla y l' integrale debba estendersi a dei confini nei quali sia tra x ed y questa relazione $y^2 + x^2 = a^2$.

Le regole ordinarie d' integrazione ci danno (supponendo in questa prima integrazione x costante)

$$\int dy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \frac{1}{2} y\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$$

$$+ \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\, Arc\ sen \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}};$$

avremo adunque

$$\int dx \int dy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \int dx \left\{ \frac{1}{2} y\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\, Arc\ sen \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \right\}.$$

Nell' eseguire questa seconda integrazione rispetto alla y, conviene estendere il primo integrale sino ad $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; facendo dunque, prima d' integrare, $y = \sqrt{(aa - xx)}$ sotto il segno sommatorio, troveremo

$$\int dx \int dy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \int dx \left\{ 0 + \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{4} \int (a^2 - x^2)\, dx, \text{ e quindi}$$

$$\int dx \int dy \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \frac{\pi}{4}\left(aax - \frac{x^3}{3}\right) + C,$$

essendo C la costante arbitraria che porta l' integrazione.

§ 212. Per farne un altro esempio, io osservo che l' area compresa tra l' ascissa, l' ordinata e l' arco di una curva ha generalmente per differenziale ydx; di modo che se rappresenteremo con z una funzione delle due coordinate x, y, che sia eguale all' area suddetta, si ha sempre $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx = ydx$.

Ora prendiamo il differenziale di quest' equazione rispetto alla y, ed avremo $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) dxdy = dydx$: dunque concluderemo che lo spazio compreso tra l' ascissa, l' ordinata e l' arco di una curva è una tale funzione delle due coordinate x, y, che il suo differenziale parziale preso rispetto alla x ed alla y è eguale a $dxdy$; e di qui ne viene che lo stesso spazio è eguale all' integrale duplicato $\int\int dxdy$, pel che si ha $z = \int\int dxdy$. L' integrale poi rispetto alla y dovrà estendersi sino ai punti nei quali y ha con la variabile x la relazione data dall' equazione della curva.

Ciò premesso (*Fig.* 16), proponiamoci di trovare la superficie del circolo $ERHQ$ paragonato ai due assi CA, CB. Sia c il raggio, $CF = f$, $FG = g$ coordinate del centro, $CP = x$, $PY = y$, ed estendendo l' integrale rispetto alla y sino alla periferia, o trasportando il punto Y nella periferia del circolo, ivi avremo $cc = (f - x)^2 + (g - y)^2$.

Ora $\int\int dxdy = \int dx \int dy = \int dx\,(y + C)$. Se dunque si estende quest' integrale rispetto alla y dal punto Q al punto R, siccome si ha

$y = g \pm \sqrt{\{cc - (f-x)^2\}}$, e si suppone che questo integrale sia nullo quando y ha il minore dei due valori, si avrà

$\int dy = y - g + \sqrt{\{c^2 - (f-x)^2\}}$, ove facendo $y =$ al maggior valore $g + \sqrt{\{c^2 - (f-x)^2\}}$, otterremo $\int dy = 2\sqrt{\{c^2 - (f-x)^2\}}$; e questo sarà l' integrale rispetto alla y esteso da un limite all'altro. Avremo dunque

$$\int\int dxdy = 2\int dx\sqrt{\{cc-(f-x)^2\}} = C' - (f-x)\sqrt{(cc - (f-x)^2\}} - cc \, Arc \, sen \frac{f-x}{c}.$$

Determiniamo C' in modo che l' integrale svanisca, quando $x = f - c$, ed avremo allora la superficie del segmento

$$QER = \frac{\pi}{2} cc - (f-x)\sqrt{\{cc - (f-x)^2\}} - cc \, Arc \, sen \frac{f-x}{c}.$$

Estendiamo quest'integrale sino alla $x = f + c$, e si troverà

$$cc \, Arc \, sen \frac{f-x}{c} = - cc \, Arc \, sen \, 1 = - \frac{\pi}{2} cc;$$

sarà dunque la superficie

$$ERHQ = \frac{\pi}{2} cc + \frac{\pi}{2} cc = \pi cc, \text{ come si sa.}$$

Se avessimo supposto che l' integrale si annullasse in R, e terminasse in Q rispettivamente alla y, il risultamento delle integrazioni sarebbe stato $-\pi cc$; e supponendo di più che relativamente alla x l' integrale incominciasse in H, e terminasse in E, il risultamento sarebbe tornato positivo; la quantità però dell' integrale definito, o la sua grandezza assoluta sarebbe stata sempre la medesima.

In questo § abbiamo supposto che s' incomincino le integrazioni dalla y; potrebbero in vero incominciare dalla x, e tutto sarebbe lo stesso. Fatta la prima integrazione rispetto alla x, come se y fosse costante, dovrebbe in questo primo integrale sostituirsi in vece della x il suo valore dato per mezzo della y, avanti d' incominciare la seconda integrazione rispetto alla y. Basti aver fatta questa avvertenza una volta.

§ 213. La ricerca degl'integrali raddoppiati $\int\int Pdxdy$ talune volte si rende molto più semplice col mezzo della trasformazione delle variabili.

Prendendo in vece della x una certa funzione di due nuove variabili t ed u, e parimente prendendo in vece dell' y un' altra funzione delle stesse t ed u, si può sempre trasformare l' integrale doppio $\int\int Pdxdy$ in quest' altro $\int\int P'dtdu$ nel quale P' è una funzione di t e di u, e le integrazioni debbono farsi relativamente a queste nuove variabili. Non si possono dare regole generali sopra la scelta delle funzioni da sostituirsi in vece della x e della y.

Sia da trasformarsi l' integrale duplicato $\int\int Pdxdy$, essendo P una funzione della x e della y: incominciamo a trasformarlo soltanto rispetto della y, supponendo che debba restare la x. Per questo indicando con u un' altra variabile, risguardiamo y come una funzione della x e della u; di modo che sia $dy = Pdx + Qdu$: ora data all'integrale duplicato $\int\int Pdxdy$ la forma $\int dx\int Pdy$, nel prendere l'integrale $\int Pdy$ conviene considerare la x come costante, e perciò avremo in tale ipotesi $dy = Qdu$; dunque

$\int\int Pdxdy = \int dx\int PQdu = \int\int PQdudx$; così il nostro integrale duplicato dipenderà da un altro, in cui le integrazioni debbono farsi rispetto a x e ad u. Si avverta che in questo secondo integrale il P è una funzione della x e della u, giacchè abbiamo tacitamente supposto di aver da esso eliminato y col mezzo della funzione della x e della u, che gli è eguale.

Trattiamo adesso l' integrale duplicato $\int\int PQdudx$ come abbiamo trattato $\int\int Pdxdy$, e supponendo x eguale ad una funzione della u e della t, per cui sia $dx = Rdt + Sdu$, avremo $\int du \int PQdx = \int du \int PQRdt$, poichè la supposizione della u costante nell' integrazione $\int PQdx$ ci dà $dx = Rdt$, ed in conseguenza $\int\int Pdxdy = \int\int PQdudx = \int\int PQRdudt$; ove si vede che nell' ultimo integrale duplicato le integrazioni dovranno farsi rispetto ad u ed a t. Il P è una funzione della t e della u, poichè dopo aver da esso eliminato y, vi si elimina la x ponendo il valore di questa variabile dato per mezzo della t e della u.

Introduciamo subito in vece della x e della y due nuove variabili t ed u, tali che sia $dx = Rdt + Sdu$, $dy = Tdt + Vdu$: se nell' equazione supposta qui sopra $dy = Pdx + Qdu$ poniamo in vece del dx il suo valore, avremo $dy = PRdt + (PS + Q)\,du$, e perciò sarà $PR = T$, $PS + Q = V$; donde si ricava $P = \frac{T}{R}$, $\frac{ST}{R} + Q = V$, e quindi $QR = VR - ST$: pertanto l' integrale duplicato $\int\int Pdxdy$ sarà cangiato in quest' altro $\int\int P\,(VR - ST)\,dtdu$, ove è $dx = Rdt + Sdu$, $dy = Tdt + Vdu$.

Le integrazioni dovranno farsi rispetto alla u ed alla t. Eseguita l' integrazione rispetto ad una variabile u, per esempio, converrà porre in vece della u il suo valore dato per mezzo della t, ed in appresso far la seconda integrazione rispetto a t. La relazione tra u e t si avrà ponendo nella equazione tra x, y, in vece della x e della y, i rispettivi valori fatti con t e con u.

§ 214. Saremmo anche giunti allo stesso risultamento in questa guisa.

Posto $\int\int Pdxdy = \int dy \int Pdx$, e fatto $dx = Rdt + Sdu$, $dy = Tdt + Vdu$, nell' ipotesi che y sia costante quando si prende l' integrale $\int Pdx$, sarà $o = Tdt + Vdu$, e perciò in questa stessa ipotesi $du = -\frac{T}{V}dt$,

$dx = Rdt - \frac{ST}{V}dt = dt\left(\frac{RV - ST}{V}\right)$, e quindi

$\int Pdx = \int \frac{RV - ST}{V} Pdt$: sarà dunque

$\int\int Pdxdy = \int\int \frac{RV - ST}{V} Pdtdy$.

Ora $\int\int \frac{RV - ST}{V} Pdtdy = \int dt \int \frac{RV - ST}{V} Pdy$;

e siccome nell' integrale $\int \frac{RV - ST}{V} Pdy$ debbe considerarsi t costante, così si avrà $dy = Vdu$, ed in conseguenza

$\int\int \frac{RV - ST}{V} Pdtdy = \int dt \int (RV - ST) Pdu = \int\int (RV - ST) Pdtdu$ come sopra.

Se nella trasformazione dell' integrale duplicato $\int\int Pdxdy$ avessimo tenuto l' ordine inverso, cominciando quest' operazione dalla y, saremmo giunti a questo risultamento $\int\int P(ST - RV)dtdu$, dal che si concluderà che la differenza $RV - ST$ debbe sempre prendersi positivamente.

Dunque l' integrale doppio $\int\int Pdxdy$, ove le integrazioni debbono farsi relativamente alla x, e alla y, si trasforma in altro ove le integrazioni sono riferite a due altre variabili t, u (essendo tra x, y, t, u

queste equazioni $dx = Rdt + Sdu$, $dy = Tdt + Vdu$) se in vece del $dxdy$ poniamo $\pm (RV - ST)\ dtdu$, e prendiamo quel segno che rende questa quantità positiva, e se sostituiamo in P, in vece della x e della y, i rispettivi valori dati per mezzo delle variabili u e t.

Non sia inutile osservare quanto ci saremmo allontanati dal vero, pretendendo di sostituire a $dxdy$ il prodotto $(Rdt + Sdu)(Tdt + Vdu) = RTdt^2 + (RV + ST)\ dudt + SVdu^2$, che è ben diverso dalla vera quantità $\pm (RV - ST)\ dtdu$.

§ 215. Facciamo qualche esempio.

Sia $P = 1$, abbiasi, cioè, l'integrale doppio $\int\int dxdy$, tra le cui variabili si trovi quest' equazione $c^2 = (f - x)^2 + (g - y)^2$.

Per farne la trasformazione, poniamo

$$f - x = \frac{t}{\sqrt{(1 + uu)}},\quad g - y = \frac{tu}{\sqrt{(1 + uu)}},$$ ed avremo

primieramente $t = c$, quindi differenziando

$$dx = -\frac{1}{\sqrt{(1 + uu)}}\, dt + \frac{tu}{(1 + uu)^{\frac{3}{2}}}\, du$$

$$dy = -\frac{u}{\sqrt{(1 + uu)}}\, dt - \frac{t}{(1 + uu)^{\frac{3}{2}}}\, du$$: sarà dunque

$$\pm (RV - ST)\ dtdu = \left(\frac{t}{(1 + uu)^2} + \frac{tuu}{(1 + uu)^2}\right) dtdu =$$

$\frac{tdtdu}{1 + uu}$, e per conseguenza

$$\int\int dxdy = \int\int \frac{tdtdu}{1 + uu} = \int du \int \frac{t}{1 + uu}\, dt.$$

Ora nell' ipotesi della u costante si ha

$\int \frac{t}{1+uu} dt = \frac{1}{1+uu} \cdot \frac{1}{2} tt$; dunque facendo $t = c$, sarà

$$\iint \frac{tdtdu}{1+uu} = \frac{1}{2} c^2 \int \frac{du}{1+uu} = \frac{1}{2} c^2 \, Arc\ tang\, u.$$

Riprendiamo l'integrale doppio trattato al (§ 211), $\iint dxdy\,(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, tra le variabili del quale vi è l'equazione $a^2 = x^2 + y^2$. Se facciamo

$x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}}$, $y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}}$, si avrà

$x^2 + y^2 = t^2$, $\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \sqrt{(a^2 - t^2)}$, e si avrà, in vece di $dydx$, la quantità $\frac{tdtdu}{1+uu}$; dunque

$$\iint dxdy\,(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \iint \frac{tdtdu\sqrt{(a^2 - t^2)}}{1+uu}.$$

§ 216. Si possono estendere queste dottrine agli integrali *triplicati* ecc. In fatti consideriamo l'integrale triplicato $\iiint Zdxdydz$, e supponiamo che nei limiti dell' integrale rispetto alla z debba esservi una relazione tra x, y, z che rappresenteremo per $z = F(x, y)$, e che in quelli rispetto alla y debba tra x ed y esservi l'equazione determinata $y = f(x)$. Di più sia Z una funzione qualunque delle x, y, z.

Diamo al nostro integrale triplicato questa forma $\int dx \int dy \cdot \int Zdz$; quindi incominciando a prendere secondo le ordinarie regole d' integrazione l'integrale di Zdz, considerando x, y costanti, poniamo

che sia $\int Zdz = \Psi(x, y, z)$. Sostituiscasi in questa funzione, in vece della z, $F(x, y)$, e si avrà

$\int\int\int dxdydz \cdot Z = \int dx \int dy \int Zdz =$

$\int dx \int \Psi \{x, y, F(x, y)\} dy$.

Prendiamo l' integrale di $\Psi\{x, y, F(x, y)\} dy$ nella supposizione della x costante, e questo sia $\Psi'(x, y)$; ed avremo ponendo nell' integrale trovato $f(x)$, in vece della y, $\int\int\int Zdxdydz = \int \Psi'\{x, f(x)\} dx$: in fine integrando quest' ultima formola, sia $\Psi''(x)$ quest' integrale, e sarà questo il cercato valore dell' integrale triplicato proposto.

CAPO IX.

Della cubatura dei solidi e dello spianamento delle superficie.

§ 217. Lo assegnare una formola la quale esprima il volume di un corpo, la cui superficie è rappresentata da un' equazione, chiamasi *cubare* o *ricubare*; e lo assegnare una consimil formola che sia atta ad esprimere l' area che occuperebbe una qualunque superficie, se si riducesse piana, dicesi *spianare*.

Cominciamo dal parlare della cubatura.

Sia (*Fig.* 17) NML la base di un solido $LNEFM$ nel piano delle coordinate x, y. Sia $PM = y$, $AP = x$, $MF = z$. Indichiamo con $F(x, y)$ funzione di x, y il volume di questo solido, di modo che sia $F(x, y) = LNEFM$.

Supponiamo che x diventi $x + \omega$, essendo $\omega = Pp$, ed allora la fetta del solido $MLEFomSH$ sarà $= F(x + \omega, y) - F(x, y)$.

Se nell' espressione di questa fetta del solido, supponiamo che y divenga $y+\theta$, essendo $mh=\theta$, avremo il volume della porzione $MnhmoqrF =$
$F(x+\omega, y+\theta) - F(x+\omega, y) - F(x, y+\theta) + F(x, y)$.

Ora se noi sviluppiamo queste funzioni in serie, e se rappresentiamo con P quella porzione del solido, si avrà $P=\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+T$; ove la quantità T significa il complesso dei termini che uniti al primo compongono l' espressione di P, e questa è della terza dimensione rispetto alle quantità ω, θ.

Ora se noi supponiamo che in quella porzione P non cadano nè massimi nè minimi (ciò che si può, giacchè da noi dipende la situazione del punto M, e le grandezze degli aumenti ω, θ), e se rappresentiamo con z', z'' la maggiore e la minore delle quattro ordinate MF, nr, hq, mo, il solido P sarà minore sempre di $\omega\theta z'$, e maggiore di $\omega\theta z''$. Ma z è una funzione di x, y; così rappresentandola con $f(x, y)$, quelle quattro ordinate saranno
$f(x, y)$, $f(x, y+\theta)$, $f(x+\omega, y+\theta)$, $f(x+\omega, y)$.
Se dunque la seconda e la terza, per esempio, sono quelle da noi chiamate z', z'', avremo sempre
$P<\omega\theta f(x, y+\theta)$, $P>\omega\theta f(x+\omega, y+\theta)$, e per conseguenza

$$\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+T>\omega\theta f(x+\omega, y+\theta),$$

$$\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+T<\omega\theta f(x, y+\theta),$$

ovvero

$$\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+T>\omega\theta z+\omega\theta S,$$

$\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+T<\omega\theta z+\omega\theta V$, ove i termini $\omega\theta S$, $\omega\theta V$, T sono quantità della terza dimensione rispetto ad ω, θ.

La differenza dunque tra i due prismi sarà sempre maggiore della differenza tra il solido P ed uno di essi. Dunque

$$\omega\theta\,(V-S)>\omega\theta\left\{\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)-z\right\}+T-\omega\theta S:$$

ora, acciò sia sempre vero questo rapporto, comunque piccoli possano prendersi ω e θ, bisogna che sia $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)=z$; dunque F sarà tal funzione delle due coordinate x, y, che il suo differenziale parziale secondo rispetto a x e ad y sarà $zdxdy$.

Avrebbe potuto trovarsi questo risultamento anche con un ragionamento simile a quello fatto per le quadrature (§ 162).

Osserviamo che considerando il solido come una funzione di x, y, z, si ha

$$\left(\frac{d^3F}{dxdydz}\right)=1\text{, è quindi } d^3F=dxdydz.$$

§ 218. Cerchiamo adesso la misura della superficie di un qualunque solido.

È un assioma adottato da tutti i Geometri, che *di due superficie dotate dei medesimi limiti, e che rivolgono la concavità dalla medesima parte, è sempre maggiore quella la quale comprende entro sè l' altra.* Ora indichiamo al solito (*Fig.* 17 e 18) con $F(x, y)$ l' espressione della superficie da noi cercata, e se consideriamo nella figura 18 la porzione P del solido, del quale abbiamo parlato al § antecedente, e che fa parte della figura 17, e con un raziocinio compagno al già fatto per la solidità, troveremo la porzione della superficie

$Foqr = \omega\theta \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) + S$, ove S è una quantità della terza dimensione rispetto alle ω, θ.

Ora dal punto F si conduca il piano $FBCD$ tangente della superficie in F, che incontri le ordinate prolungate in B, C, D, e così formi il quadrilatero $FBCD$. Si conducano le rette Fo, oq, qr, rF, Fq, onde si formino i due triangoli Foq, Frq al di sotto della superficie. Consideriamo anche il triangolo FrD e quello FoB.

Fingiamo che si abbiano altre tre porzioni di solido eguali in tutto e per tutto a quella disegnata nella figura 18, nelle quali siansi condotti i rispettivi piani tangenti e le rispettive linee come nella prima. Si dispongano questi quattro solidi in modo che le facce eguali e simili $mBCh$, $hCDn$ da solido a solido si combacino tra loro, e non è difficile a concepire che in questa operazione le quattro superficie curve, come $Frqo$, formeranno una volta la cui superficie sarà quadrupla di $Forq$. Sotto a questa volta ve ne sarà un' altra composta di otto triangoli, quattro dei quali saranno eguali ad Foq, e quattro ad Fqr; queste due volte termineranno allo stesso contorno.

Sopra la volta formata da quelle quattro porzioni di superficie curve, ve ne sarà un' altra formata da quattro trapezzj, come $FDCB$, e da otto triangoli, come FoB, FrD. Questa volta, egualmente che le altre due, terminerà allo stesso contorno di esse. Ora, secondo il principio qui sopra stabilito, questa volta ultima sarà maggiore della volta fatta dalle superficie curve, e questa maggiore di quella sottoposta fatta dagli otto triangoli. Le quarte parti dunque di queste tre volte avranno tra loro gli stessi rapporti; così sarà

$$triang\ Frq + triang\ Fqo < superficie\ Frqo,$$

$$sup\ Frqo < triang\ FrD + trapez\ FDCB + triang\ FoB.$$

§ 219. Esprimiamo algebraticamente questi rapporti.

Il trapezzio $FDCB$ eguaglia la projezione $Mmhn = \omega\theta$ divisa pel coseno della inclinazione del piano tangente, in cui si trova il trapezzio, col piano delle x, y; questo coseno è

$$\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}}\text{; dunque}$$

$$FDCB=\omega\theta\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}.$$

$$\text{Il triangolo } FoB = oB\cdot\frac{Mm}{2}=\{mB-mo\}\cdot\frac{Mm}{2}$$

$$=\frac{\omega}{2}\left\{z+\omega\left(\frac{dz}{dx}\right)-mo\right\}=\frac{\omega}{2}\left\{-\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\text{ecc.}\right\}$$

$= \omega^3 R + P$, ove R esprime ciò che debbe moltiplicare ω^3, e P il complesso di quei termini che seguono.

Il triangolo $FrD = \theta^3 R' + P'$; dunque

$$FDCB+FrD+FoB=\omega\theta\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}$$

$+ T$, essendo T una quantità composta di termini di dimensioni maggiori della seconda rispetto alle ω, θ.

Nel triangolo Fqo si ha

$(Fo)^2 = (Mm)^2 + (mo - MF)^2$,
$(oq)^2 = (mh)^2 + (hq - mo)^2$,
$(Fq)^2 = (Mm)^2 + (mh)^2 + (hq - MF)^2$;

ma $Mm = \omega$, $mh = \theta$, $mo = z + \omega\left(\frac{dz}{dx}\right) + \text{ecc.}$,

$hq = z + \omega\left(\frac{dz}{dx}\right) + \theta\left(\frac{dz}{dy}\right) + \text{ecc.}$, $MF = z$; dunque

*

$$(Fo)^2 = \omega^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right\} + H,$$

$$(oq)^2 = \theta^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\} + H',$$

$$(Fq)^2 = \omega^2 + \theta^2 + \left\{ \omega \left(\frac{dz}{dx}\right) + \theta \left(\frac{dz}{dy}\right) \right\}^2 + H'',$$ ove

H, H', H'' sono quantità di una dimensione più alta della seconda relativamente agli aumenti ω, θ.

Ora si sa che l' area del triangolo Fqo è

$$\frac{1}{4} \sqrt{\left\{ 4 (Fo)^2 \cdot (oq)^2 - \{ (Fo)^2 + (oq)^2 - (Fq)^2 \}^2 \right\}};$$

sostituendo dunque in quest' espressione i valori di Fo, oq, Fq, troveremo una quantità di questa forma

$$Foq = \frac{1}{4} \sqrt{\left\{ 4\omega^2\theta^2 \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right] + \right.}$$

$$\left. + L - \{ \omega^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \theta^2 \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - \left[\omega \left(\frac{dz}{dx}\right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \theta \left(\frac{dz}{dy}\right) \right]^2 + L' \}^2 \right\}.$$

Se questa espressione si sviluppa in serie, avremo

$Foq = \frac{\omega\theta}{2} \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\}} + O$, ove O indica una quantità di dimensione maggiore della seconda relativamente ad ω, θ.

Nella stessa guisa troveremo

$Frq = \frac{\omega\theta}{2} \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\}} + O'$; di modo che

$$Foq + Frq = \omega\theta \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\}} + O + O'.$$

Dunque per la natura delle superficie curve dovrà essere sempre

$$\omega\theta \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}+O+O'<\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+S,$$

$$\omega\theta \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}+T>\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+S;$$

ovvero

$$T-O-O'>\omega\theta\left[\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}-\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)\right]+T-S,$$ ove il primo termine del rapporto è composto di quantità che hanno dimensioni maggiori della seconda.

Ma siccome, non annullandosi il coefficiente di $\omega\theta$, si potrebbero determinare gli aumenti in tal modo che questo rapporto non reggesse più; dunque è giocoforza che sia

$$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}-\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)=0;$$

e di qui si ricava

$$F(x,y)=\iint\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\,dxdy.$$

§ 220. Per fare alcune applicazioni di queste dottrine, supponiamo che (*Fig.* 19) BAC sia il piano delle x, y orizzontale; A l' origine delle coordinate; AB l' asse delle x; AC quello delle y. Col raggio $AB=a$ sia descritto il quarto del circolo EGF, sul quale si appoggi una quarta parte di semisfera; facciamo la cubatura di questa porzione di sfera.

La solidità ricercata sarà $P=\int^3 dx\,dy\,dz$. Si faccia la prima integrazione relativamente a z, e si avrà $P=\int^2 zdxdy$. Ora conviene porre, in vece della

z, il suo valore dato per mezzo delle x, y dalla equazione della superficie sferica, cioè si ha da fare $z = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$, ed avremo

$$P = \int\int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dx dy = \int dx \int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy.$$

Questo integrale doppio (§ 211) è

$$P = \frac{\pi}{2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Determiniamo la costante C per modo che la solidità svanisca quando $x = 0$, e sarà $C = 0$; se poi vogliamo estendere l'integrale sino a $x = a$, avremo $P = \frac{\pi}{6} a^3$. Tale essendo la solidità di un quarto di semisfera, quella della intiera sfera sarà $= \frac{4\pi}{3} a^3$.

§ 221. Supponiamo ora che non si voglia già l'ottava parte della sfera, ma soltanto quella porzione che si appoggia alla base rettangolare *HIKA*.

Rappresentata egualmente la solidità con $P = \int dx \int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy$, in virtù di una prima integrazione si ha

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy = \frac{1}{2}\, y \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$$

$$+ \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \cdot \text{Arc sen} \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Ora facendo $AK = e$, $AH = f$, estendiamo quest'integrale da $y = 0$ ad $y = f$, ed avremo

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy = \frac{1}{2} f \sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}$$

$$+ \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \cdot \text{Arc sen} \frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}};$$ dunque

$$P=\int dx\int\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}\,dy=\frac{1}{2}\int\!\!\int\sqrt{(a^2-f^2-x^2)}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int(a^2-x^2)\,Arc\ sen\,\frac{f}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\cdot dx\,,$$ e quest' integrale dovrà prendersi tra i limiti $x=0$, $x=e$.

L' integrale del primo termine del secondo membro si ha subito: esso è

$$\int dx\sqrt{(a^2-f^2-x^2)}=\frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-f^2-x^2)}$$

$$+\frac{1}{2}(a^2-f^2)\cdot Arc\ sen\,\frac{x}{\sqrt{(a^2-f^2)}}.$$

Rispetto all' altro termine osservo che essendo

$$d\,Arc\ sen\,\frac{f}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{fxdx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-f^2-x^2)}}\,,$$

si avrà facendo l' integrazione a parti

$$\int(a^2-x^2)\,dx\,Arc\ sen\,\frac{f}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\times$$

$$Arc\ sen\,\frac{f}{\sqrt{(a^2-x^2)}}-f\int\frac{(a^2-\frac{1}{3}x^2)x^2dx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-f^2-x^2)}}.$$

Per integrare quest' ultima, si avverta che

$$Arc\ sen\,\frac{fx}{\sqrt{(a^2-f^2)(a^2-x^2)}}=\int\frac{afdx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-f^2-x^2)}},$$

e quindi ponendo $\displaystyle\int\frac{(a^2-\frac{1}{3}x^2)x^2dx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-f^2-x^2)}}$

$$+\,m\,Arc\ sen\,\frac{fx}{\sqrt{(a^2-f^2)(a^2-x^2)}}$$

$$=\int\frac{(a^2x^2-\frac{1}{3}x^4+maf)\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-f^2-x^2)}}\,,$$ cerchiamo di

determinare m in tal modo che sia $a^2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + maf$ divisibile per $a^2 - x^2$.

Ma ciò succede appunto se $m = -\frac{2a^3}{3f}$, e si ha il quoziente $-\frac{2a^2 - x^2}{3}$; dunque

$$\int\frac{(a^2 - \frac{1}{3}x^2)x^2dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}} = \frac{2a^3}{3f} \times$$

$$\text{Arc sen}\,\frac{fx}{\sqrt{(a^2 - f^2)(a^2 - x^2)}} - \frac{1}{3}\int\frac{(2a^2 - x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}}.$$

Inoltre

$$\int\frac{(2a^2 - x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}} = \frac{1}{2}(3a^2 + f^2)\,\text{Arc sen}\,\frac{x}{\sqrt{(a^2 - f^2)}}$$

$$+ \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)};$$ e perciò

$$\int\frac{(a^2 - \frac{1}{3}x^2)x^2dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}} = \frac{2a^3}{3f} \times$$

$$\text{Arc sen}\,\frac{fx}{\sqrt{(a^2 - f^2)(a^2 - x^2)}} - \frac{1}{6}(3a^2 + f^2) \times$$

$$\text{Arc sen}\,\frac{x}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} - \frac{1}{6}x\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)};$$

sarà pertanto

$$\int(a^2 - x^2)\,dx\,\text{Arc sen}\,\frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right) \times$$

$$\text{Arc sen}\,\frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \frac{2}{3}a^3 \times$$

$$\text{Arc sen}\,\frac{fx}{\sqrt{(a^2 - f^2)(a^2 - x^2)}} + \frac{1}{6}f(3a^2 + f^2) \times$$

$$Arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{(a^2-f^2)}} + \frac{1}{6} f x \sqrt{(a^2-f^2-x^2)}.$$

La solidità dunque della porzione sferica che si appoggia al rettangolo $AHIK$, si avrà facendo $x=e$; sarà essa

$$P = \frac{1}{4} e f \sqrt{(a^2-e^2-f^2)} + \frac{1}{4} f (a^2-f^2) \times$$

$$Arc\ sen\ \frac{e}{\sqrt{(a^2-f^2)}} + \frac{1}{6} e (3a^2-e^2) \times$$

$$Arc\ sen\ \frac{f}{\sqrt{(a^2-e^2)}} - \frac{1}{3} a^3 \times$$

$$Arc\ sen\ \frac{ef}{\sqrt{(a^2-e^2)(a^2-f^2)}} + \frac{1}{12} f (3a^2+f^2) \times$$

$$Arc\ sen\ \frac{e}{\sqrt{(a^2-f^2)}} + \frac{1}{12} e f \sqrt{(a^2-e^2-f^2)},$$

la quale espressione si riduce come segue:

$$P = \frac{1}{3} e f \sqrt{(a^2-f^2-e^2)} + \frac{1}{6} f (3a^2-f^2) \times$$

$$Arc\ sen\ \frac{e}{\sqrt{(a^2-f^2)}} + \frac{1}{6} e (3a^2-e^2) \times$$

$$Arc\ sen\ \frac{f}{\sqrt{(a^2-e^2)}} - \frac{1}{3} a^3 \times$$

$$Arc\ sen\ \frac{ef}{\sqrt{(a^2-e^2)(a^2-f^2)}}.$$

§ 222. Se il termine I del rettangolo si prolungasse sino alla periferia, onde si avesse $e^2+f^2=a^2$, il primo termine di P svanirebbe e gli altri tre archi circolari diverebbero di $90°$, ovvero $\frac{\pi}{2}$;

sarebbe allora

$$P=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}a^2e+\frac{1}{2}a^2f-\frac{1}{6}e^3-\frac{1}{6}f^3-\frac{1}{3}a^3\right),$$

ovvero essendo $f=\sqrt{(a^2-e^2)}$,

$$P=\frac{\pi}{12}\left\{(2a^2+e^2)\sqrt{(a^2-e^2)}-2a^3+3a^2e-e^3\right\}.$$

Questo solido diviene un massimo se $f=e=\frac{a}{\sqrt{2}}$, e si ha allora $P=\frac{\pi a^3(5-2\sqrt{2})}{12\sqrt{2}}$. La solidità della ottava parte della sfera si trovò essere $\frac{\pi}{6}a^3$, così il nostro solido starà all' ottava parte della sfera come $5-2\sqrt{2}:2\sqrt{2}$.

Se il punto I non perverrà alla periferia, e sarà $f \neq e$, avremo

$$P=\frac{1}{3}e^2\sqrt{(a^2-2ee)}+\frac{1}{3}e(3a^2-e^2)\times$$

$$\text{Arc sen}\frac{e}{\sqrt{(a^2-e^2)}}-\frac{1}{3}a^3\,\text{Arc sen}\frac{e^2}{a^2-e^2};$$

onde se prenderemo, in vece della e, tal quantità che stia

$$\text{Arc sen}\frac{e}{\sqrt{(a^2-e^2)}}:\text{Arc sen}\frac{e^2}{a^2-e^2}::a^3:e\,(3a^2-e^2),$$

il solido P sarà espresso algebraticamente.

§ 223. Cerchiamo ora il solido che si appoggia ad una qualunque base $STFV$, ed indichiamo al solito con P il di lui volume, avremo

$$P=\iiint dxdydz=\iint zdxdy=\int dx\int\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}\,dy,$$

estendendo le integrazioni tra i limiti della x e della y.

Una prima integrazione ci dà al solito

$$\int \sqrt{(a^2-x^2-y^2)}\, dy = \frac{1}{2} y \sqrt{(a^2-x^2-y^2)}$$

$$+ \frac{1}{2}(a^2-x^2)\, Arc\, sen \frac{y}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$; supponiamo

che la natura della curva che forma la base del solido, ci dia per gli estremi valori della y, $y = NV = r$, $y = MT = q$, ed allora l'integrale ottenuto, esteso tra questi limiti, sarà

$$\frac{1}{2}\left\{ r\sqrt{(a^2-x^2-r^2)} + (a^2-x^2)\, Arc\, sen \frac{r}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - q\sqrt{(a^2-x^2-q^2)} - (a^2-x^2)\, Arc\, sen \frac{q}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \right\}.$$

Questi valori della y possono essere funzioni della x; così la solidità cercata sarà l'integrale di quest' ultima espressione moltiplicata con dx, esteso tra i valori estremi della x, cioè tra $x = AL$ ed $x = AO$.

Se si cercasse il volume del solido che si appoggia sopra la base $ARDQ$, dovremmo allora nella espressione superiore porre $y = q = 0$, $y = r = AR$, e si avrebbe

$$P = \frac{1}{2} \int dx \left\{ r\sqrt{(a^2-x^2-r^2)} + (a^2-x^2)\, Arc\, sen \frac{r}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \right\}$$: quest' integrale dovrà poi estendersi da $x = 0$ sino ad $x = AQ$. S' avverta che r è una funzione della x data dalla natura della curva RDQ. E qui supponendo incognita la relazione tra x e r, si potrebbe cercare quella che rende il solido che si appoggia sopra la base $ARDQ$, capace di essere espresso con formola algebratica. Noi però non ce ne occuperemo.

§ 224. Se attentamente noi consideriamo le determinazioni degl' integrali da noi date, vedremo che i valori estremi della x sono presi in tal modo, che se la curva della base rientra in sè stessa, uno è massimo e l' altro minimo. Questi due valori si ritrovano eguagliando a zero $\left(\frac{dx}{dr}\right)$.

Quando poi la base non è terminata da una sola linea curva, ma da una qualunque porzione *RDQ*, la cui base *AQ* sia la massima, allora il minor valore della x è zero, ed il maggiore è AQ; e questi sono i limiti tra i quali estender si debbe la seconda integrazione: i limiti poi rispetto alla prima sono i termini dell' ordinata r della curva *RDQ*, il minore dei quali è zero.

Data dunque una qualunque base, bisogna esaminare scrupolosamente la di lei figura, onde assegnarne per ogni verso i termini, per poi estendere, come si conviene, le integrazioni tra i limiti. Simili indagini debbono farsi per qualunque integrale doppio o triplo, ecc. che ci venisse proposto.

§ 225. Facciamo qualche esempio dello spianamento delle superficie.

Si cerchi (*Fig.* 19) la superficie dell' ottava parte di una sfera la quale ricuopre il quadrante *AEGF*.

Indicando con P questa superficie, si ha

$$P = \iint \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\, dxdy.$$

Poniamovi $z = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$, ed avremo,

$$P = \iint \frac{adxdy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}, \text{ ovvero}$$

$$P = a\int dx \int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}.$$

Se noi supponiamo x costante, si ha

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}} = Arc\ sen\ \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Quest' integrale, esteso da $y = 0$ sino ad $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, diviene

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(a - x^2 - y^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$ Si ha dunque

$P = \frac{a\pi}{2} \int dx = \frac{a^2\pi}{2}$, estendendo questo secondo integrale da $x = 0$ sino ad $x = a$.

La superficie dell' intiera sfera sarà dunque $8P = 4\pi a^2$, cioè eguale a quattro circoli genitori, come si sa.

§ 226. Proponiamoci ora la soluzione di un celebre problema conosciuto sotto il nome di problema *fiorentino*.

Consiste questo nell' *assegnare geometricamente in una superficie sferica una tale porzione che possa esprimersi algebraticamente.*

Condotta (*Fig.* 19) una qualunque curva RDQ, la porzione della superficie sferica che esprimersi debbe algebraticamente, sia quella che cuopre il trapezzio mistilineo $ERQF$, e si cerchi la natura di quella curva RDQ.

Facendo $Ag = x$, $gU = y$, rappresentiamo con P non la superficie che si cerca, ma quella che cuopre la base $AgUR$, avremo allora

$$P = \int\int \frac{adxdy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}},$$ e dopo una prima integrazione

$$P = a \int dx \cdot Arc\ sen\ \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

E questa l' espressione di quella porzione di sfera la quale cuopre l' area indefinita $AgUR$.

Senza andare avanti nello sviluppo dell' ultima formola, permutiamo le variabili di quell' integrale doppio, e facciamo

$$x = \frac{t}{\sqrt{(1 + u^2)}},\ y = \frac{tu}{\sqrt{(1 + u^2)}},$$ e ne avremo poi

$$x^2 + y^2 = t^2,\ u = \frac{y}{x}.$$

Secondo la regola del (§ 214) questa permutazione ci dà

$$P = \iint \frac{adxdy}{(a^2 - x^2 - y^2)} = \pm \int \frac{atdtdu}{(1 + u^2)\sqrt{(a^2 - t^2)}},$$

ove si prenderà quel segno che rende il risultamento positivo.

Facciamo una prima integrazione supponendo u costante, e sarà

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{(a^2 - t^2)}} = C - \sqrt{(a^2 - t^2)} = a - \sqrt{(a^2 - t^2)};$$

e la costante C dovrà determinarsi in modo che svanisca l' integrale quando $t = 0$.

Avremo pertanto

$$P = \pm \int \frac{adu}{1 + u^2} \{a - \sqrt{(a^2 - t^2)}\} = \pm$$

$$\left\{a^2 \cdot Arc\ tang\, u - \int \frac{adu}{1 + u^2} \sqrt{(a^2 - t^2)}\right\}.$$

Con facilità si può rendere quest' ultimo termine assolutamente integrabile; in fatti eguagliamolo ad una funzione qualunque algebratica di u, e sia V; si avrà allora

$P = \pm \{a^2 \cdot Arc\ tang\, u + V\}$, e poi

$$-\sqrt{(a^2 - t^2)} = \frac{1 + u^2}{a}\left(\frac{dV}{du}\right).$$

Qualnnque funzione algebratica dunque si prenda in vece della V, darà una relazione algebratica tra t ed u, dalla quale si ricaverà una relazione algebratica tra x, y, ed in conseguenza una soluzione del problema, come or ora vedremo. Il problema dunque potrà risolversi in infiniti modi. Consideriamone i più semplici.

§ 227. Facciamo $V = \frac{a(\alpha + \beta u)}{\sqrt{(1+u^2)}}$, e si avrà

$\left(\frac{dV}{du}\right) = -\frac{a(\alpha u - \beta)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$; quindi l' equazione tra t ed u sarà $-\sqrt{(a^2 - t^2)} = \frac{\beta - \alpha u}{\sqrt{(1+u^2)}}$.

Da questa risulterà l' equazione della curva cercata

$\sqrt{(x^2 + y^2)}\,(a^2 - x^2 - y^2) = \alpha y - \beta x$, e la superficie P di quella porzione di sfera sarà

$P = a^2 \cdot \text{Arc tang}\, u + \frac{a(\alpha + \beta u)}{\sqrt{(1+u^2)}}$, ovvero sostituendo in vece della u e della t i rispettivi valori fatti colla x, y,

$P = a^2 \cdot \text{Arc tang}\, \frac{y}{x} + \frac{a(\alpha x + \beta y)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$: abbiamo tralasciato il doppio segno, ma ci rammenteremo di moltiplicare per $-$ il secondo membro, se mai ci risultasse negativo, onde farlo tornare positivo.

Se ora si suppone $\beta = 0$, $\alpha = a$, avremo

$P = a^2 \cdot \text{Arc tang}\, \frac{y}{x} + \frac{a^2 x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, e l' equazione della curva sarà $a^2x^2 - (x^2+y^2)^2 = 0$, o sia $y^2 = ax - x^2$, di modo che la curva RDQ (*Fig.* 19) sarà

un semicircolo descritto sopra il raggio $AF = a$ come diametro.

Estendiamo questa superficie da $x = 0$ sino ad $x = a$, ed avremo

$P = -a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + a^2$, cui cangiando i segni secondo il detto sopra, troveremo

$$P = \frac{a^2\pi}{2} - a^2.$$

Si abbia sott' occhio la figura 19, e la porzione di superficie sferica indicata con P sarà quella la quale cuopre la base *CERA*.

Ora la suddetta porzione di superficie sferica è eguale alla superficie dell' ottava parte della sfera, meno quella porzione che cuopre il trilineo *CBSAREC*; dunque quest' ultima porzione eguaglierà il quadrato del raggio a.

Abbiamo pertanto ritrovata una porzione di superficie sferica, quella, cioè, che cuopre il trilineo suddetto quadrabile.

Essa eguaglia il quadrato del raggio *CA*.

Questo problema fu proposto da Viviani ai primi coltivatori del calcolo differenziale, e fu enunciato così.

In una volta semisferica voglionsi aprire quattro finestre; si dimanda di farlo in modo che la superficie della volta, che rimane, riesca quadrabile.

CAPO X.

Integrazione dell' equazioni differenziali del primo ordine.

§ 228. Ad una equazione differenziale del primo ordine tra le due variabili x, y può sempre darsi la forma $P = Q\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ovvero $Pdx = Qdy$, ove P e Q indicano funzioni della x e della y.

Ora *integrare* una data equazione $Qdy = Pdx$ significa trovare un' altra equazione tra x, y ed una costante arbitraria, tale che eliminata per mezzo della differenziazione questa costante, risulti la proposta equazione differenziale, o un' equazione che ad essa si riduca. A quell' equazione tra x, y e la costante arbitraria si dà il nome d' *integrale completo*; e questo integrale completo ha ancora la proprietà, che preso da esso il valore della y, e per mezzo della differenziazione quello della $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e sostituiti nell' equazione differenziale, questa diventa identica.

§ 229. Si risguarda come ottenuto l' integrale di un' equazione $Pdx = Qdy$, allorchè si fa esso dipendere dall' integrazione delle funzioni; e siccome l' integrale di una funzione, come $\int Xdx$, può sempre rappresentare lo spazio compreso tra l' ascissa, l' ordinata e l' arco di una curva; così questo modo d' integrare un' equazione, riportandola, cioè, alla integrazione delle funzioni, dicesi *integrare per mezzo delle quadrature.*

Onde integrare adunque per mezzo delle quadrature un' equazione $Qdy = Pdx$, converrà poterla ridurre a tal forma, che ciascuno dei membri sia funzione di una sola variabile, o, come suol dirsi, ridurre l' equazione ad avere le variabili separate; e perciò questo metodo d' integrazione si dice anche il metodo della *separazione delle variabili.*

§ 230. In mancanza di regole generali per questa separazione, ne daremo alcune particolari.

L' equazione $PYdx = QXdy$, nella quale P, X indichino due funzioni della x; e Q, Y due funzioni della y, avrà le variabili separate, se la divideremo per XY, giacchè allora essa diverrà

$$\frac{P}{X}dx = \frac{Q}{Y}dy.$$

Nell' equazione $Pdx = Qdy$, se P e Q sono due funzioni omogenee delle x, y, così si ottiene la separazione delle variabili. Fatto $y = ux$, e sostituito questo valore della y in $\frac{P}{Q}$, che allora è una funzione di nessuna dimensione, questo $\frac{P}{Q}$ si cangerà in U, essendo U una funzione della sola u; dunque l' equazione $dy = \frac{P}{Q}dx$ si cangerà in $udx + xdu = Udx$, e questa in $\frac{dx}{x} = \frac{du}{U-u}$, il cui integrale è $\log x = \int \frac{du}{U-u} + C$. Per esempio, l' equazione $xdx + ydy = xdy - ydx$ si trasforma con questa supposizione $y = ux$, a quest' altra $\frac{dx}{x} = \frac{du - udu}{1 + uu}$, il cui integrale è $\log x = A\, tang\, u - \log \sqrt{(1 + uu)} + C$ ovvero $l x \sqrt{(1 + u^2)} = C + A\, tang\, u$; e facendo $= \frac{y}{x}$, $l \sqrt{(x^2 + y^2)} = C + A\, tang\, \frac{y}{x}$.

Per un altro esempio abbiasi $xdy - ydx = dx \sqrt{(x^2 + y^2)}$: questa, fatto $y = ux$, diventa $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{(1 + u^2)}}$, della quale l' integrale è $lx = la + l\{(u + \sqrt{(1 + uu)}\}$, ove la è la costante arbitraria.

Rimettiamo il valore di u, che è $\frac{y}{x}$, e si avrà $lx = la + l \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)} - y}$, la quale si riduce anco a questa $x^2 = a^2 + 2ay$.

L' equazione $dz + zzdx = \frac{adx}{x^2}$ non è omogenea, ma ella si riduce tale facendo $z = \frac{1}{y}$, e perciò essa potrà integrarsi con lo stesso ripiego.

§ 231. Per separare le variabili nell' equazione $dy + Pydx = Qdx$, ove P e Q sono funzioni della x, facciamo $y = Xu$, e fatta la sostituzione, si ha $Xdu + udX + PXudx = Qdx$. Poniamo $dX + PXdx = 0$, ed avremo $X = e^{-\int Pdx}$. Allora la nostra trasformata si ridurrà a $Xdu = Qdx$, ovvero $du = \frac{Q}{X} dx$, ove le variabili sono separate: questa ci darà $u = \int \frac{Qdx}{X} = \int e^{\int Pdx} Qdx + C$, ed in conseguenza $y = e^{-\int Pdx}\left(C + \int e^{\int Pdx} Qdx\right)$.

L' integrale di quest' altra equazione $dx + Pydx = Qy^{n+1} dx$ si ricava da quello qui ritrovato: in fatti essa si cangia in quella da noi integrata, col fare $\frac{1}{y^n} = z$.

Per illustrare queste cose con qualche esempio, abbiasi l' equazione $(1 - xx)\, dy + xydx = adx$. In questo caso abbiamo

$$P = \frac{x}{1 - xx},\quad Q = \frac{a}{1 - xx},\ \text{e perciò}$$

$$\int Pdx = -l\sqrt{(1 - xx)},\quad e^{\int Pdx} = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}};$$

dunque

$$y = \sqrt{(1-xx)} \cdot \left\{ C + \int \frac{adx}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} \right\} =$$

$$\sqrt{(1-xx)} \left\{ C + \frac{ax}{\sqrt{(1-xx)}} \right\}, \text{ ovvero}$$

$$y = ax + C\sqrt{(1-xx)}.$$

§ 232. Si domanda la somma della serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot4} + \frac{1}{2\cdot4\cdot6} + \frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \text{ecc.}$$

Se facciamo

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot4} + \frac{x^6}{2\cdot4\cdot6} + \frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \text{ecc.},$$

sarà y la somma di quella serie, quando vi si ponga $x = 1$.

Differenziando ora la supposta equazione, avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = x \left\{ 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot4} + \frac{x^6}{2\cdot4\cdot6} + \text{ecc.} \right\} =$$

$$x\,(1+y), \text{ e perciò}$$

$$-xy + \left(\frac{dy}{dx}\right) = x, \text{ ovvero } dy - xydx = xdx.$$

In questo caso si ha $P = -x$; $Q = x$, e quindi

$$y = e^{\int xdx} \left\{ C + \int e^{-\int xdx} xdx \right\} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left\{ C + \int e^{-\frac{x^2}{2}} xdx \right\}, \quad y = e^{\frac{x^2}{2}} \left\{ C - e^{-\frac{x^2}{2}} \right\} =$$

$Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$: determinando ora la costante in modo

che quando $x=0$, sia $y=0$, avremo

$$0=Ce^{0}-1, \text{ da cui } C=1, \text{ e perciò } y=e^{\frac{x^2}{2}}-1.$$

Sarà dunque la somma della nostra serie $\sqrt{e}-1$.

§ 233. Per ridurre l' equazione del primo ordine $(a+bx+cy)\,dx=(e+fx+gy)\,dy$ ad avere le variabili separate, facciasi $a+bx+cy=t$, $e+fx+gy=u$, ed avremo

$$x=\frac{gt-cu+ag-ce}{bg-cf},\quad y=\frac{bu-ft+af-be}{bg-cf},$$

$$dx=\frac{gdt-cdu}{bg-cf},\quad dy=\frac{bdu-fdt}{bg-cf}:$$

fatte le opportune sostituzioni, la proposta diventerà $gtdt-ctdu=budu-fudt$, ovvero $dt\,(gt+fu)=du\,(bu+ct)$, la quale, essendo omogenea, ammette sempre la separazione delle variabili.

Quando $bg=cf$; questa riduzione non è buona, allora data alla nostra equazione questa forma $adx+(bx+cy)\,dx=edy+(fx+gy)\,dy$, pongasi $bx+cy=z$, ed avremo $dy=\frac{dz-bdx}{c}$, onde, fatte le opportune sostituzioni, troveremo $(a+z)\,dx=\frac{dz-bdx}{c}(e+fx+gy)$; ora essendo $bx+cy=z$, si avrà $bgx+cgy=gz$, ovvero $cfx+cgy=gz$; dunque

$$(a+z)\,dx=\frac{dz-bdx}{c}\left(e+\frac{gz}{c}\right)$$

sarà l' equazione in cui si trasforma la proposta. In quest' ultima le variabili si separano a dirittura senza alcun ripiego.

Prendiamo a separare le variabili anche da quest' equazione $(y-x)\,dy = \frac{ndx\,(1+yy)\sqrt{(1+yy)}}{\sqrt{(1+xx)}}$.

Facciamo $y = \frac{x-u}{1+xu}$, e sarà $y-x = \frac{-u\,(1+xx)}{1+xu}$, $1+yy = \frac{(1+xx)\,(1+uu)}{(1+ux)^2}$,

$dy = \frac{dx\,(1+uu) - du\,(1+xx)}{(1+ux)^2}$: sostituiti questi valori nell' equazione, essa diverrà

$-udx\,(1+uu) + udu\,(1+xx) = ndx\,(1+uu)\sqrt{(1+uu)}$,

nella quale le variabili possono separarsi, e si ottiene

$$\frac{dx}{1+xx} = \frac{udu}{(1+uu)\,(n\sqrt{(1+uu)}+u)}.$$

§ 234. Andiamo adesso a parlare della separazione delle variabili nella celebre equazione del RICCATI

$dy + yydx = ax^m dx.$

In primo luogo la separazione delle variabili riesce quando $m=0$: allora in fatti l' equazione diviene

$dy + yydx = adx$, ovvero $\frac{dy}{a-yy} = dx.$

Poniamo $y = \frac{b}{z}$, e si avrà

$-bdz + bbdx = ax^m zzdx$: questa diventerà della medesima forma della proposta, se faremo

$x^{m+1} = t$, onde sia $x^m dx = \frac{dt}{m+1}$, e

$dx = \frac{t^{-\frac{m}{m+1}} dt}{m+1}$; sarà allora $bdz + \frac{azzdt}{m+1} = \frac{bb}{m+1} t^{-\frac{m}{m+1}} dt.$

Essendo b una costante indeterminata, supponiamo $b = \frac{a}{m+1}$, e si avrà

$dz + zzdt = \frac{a}{(m+1)^2} t^{-\frac{m}{m+1}} dt$; dal che si ricava che se l' equazione proposta ammette la separazione delle variabili quando $m = n$, l' ammetterà anco quando $m = \frac{-n}{n+1}$.

Poniamo $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{xx}$, e si avrà

$dy = -\frac{dx}{xx} - \frac{dz}{xx} + \frac{2zdx}{x^3}$,

$yydx = \frac{dx}{xx} - \frac{2zdx}{x^3} + \frac{zzdx}{x^4}$, e quindi sostituendo

$-\frac{dz}{xx} + \frac{zzdx}{x^4} = ax^m dx$, ovvero

$dz - \frac{zzdx}{xx} = -ax^{m+2} dx$. Facciasi ora $x = \frac{1}{t}$, e si otterrà $dz + zzdt = at^{-m-4} dt$, la quale essendo simile alla proposta, ci dice che se la separazione

riesce quando $m=n$, riescirà anche quando $m=-n-4$. Dunque da un caso $m=n$ ne ricaviamo due,

$m=-\frac{n}{n+1}$, e $m=-n-4$.

Ma la separazione delle variabili si può fare quando $m=0$; dunque la potremo fare anco quando

$m=-4$; $m=-\frac{4}{3}$; $m=-\frac{8}{3}$; $m=-\frac{8}{5}$; $m=-\frac{12}{5}$; $m=-\frac{12}{7}$, ecc.

Tutti questi casi sono compresi nella formola $m=\frac{-4i}{2i\pm 1}$ in cui i rappresenta un numero intiero e positivo.

§ 235. Se dunque sarà $m=\frac{-4i}{2i+1}$, ovvero $m=\frac{-4i}{2i-1}$, l' equazione $dy+yydx=ax^m dx$ si ridurrà per mezzo delle successive sostituzioni finalmente alla forma $du+uudv=cdv$, ove le variabili si separano a dirittura; in fatti se sarà $m=\frac{-4i}{2i+1}$, l' equazione

$dy+yydx=ax^m dx$, per mezzo delle sostituzioni

$x=t^{\frac{1}{m+1}}$, $y=\frac{a}{(m+1)z}$ si riduce a questa

$dz+zzdt=\frac{a}{(m+1)^2}t^n dt$, essendo $n=\frac{-m}{m+1}$, ed in conseguenza $n=\frac{-4i}{2i-1}$, il qual caso deve considerarsi di un grado inferiore del primo.

Se poi sarà $m = \frac{-4i}{2i-1}$, allora si faranno queste due sostituzioni $x = \frac{1}{t}$ ed $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{xx}$, ovvero $y = t - ttz$, e l' equazione proposta si ridurrà a quest' altra $dz + zzdt = at^n dt$, nella quale
$n = \frac{-4(i-1)}{2i-1} = \frac{-4(i-1)}{2(i-1)+1}$, il qual caso è anche inferiore di un grado.

Tutti questi casi dunque, nei quali l' equazione del Riccati permette che le sue variabili siano separate, danno per m dei numeri negativi contenuti tra i limiti 0, e -4; e se i diviene infinito, si ha il caso $m = -2$, nel quale l' equazione

$dy + yydx = \frac{adx}{xx}$ diviene omogenea, facendo $y = \frac{1}{z}$.

Anche l' equazione più generale

$dy + Ayyt^\mu dt = Bt^\lambda dt$ si riduce alla forma di quella qui sopra considerata; imperocchè, se si fa $At^\mu dt = dx$, si avrà $At^{\mu+1} = (\mu+1)x$, e quindi

$$t = \left(\frac{\mu+1}{A}\right)^{\frac{1}{\mu+1}} \cdot x^{\frac{1}{\mu+1}};$$ onde, sostituendo, l' equazione diverrà

$$dy + yydx = B\left(\frac{\mu+1}{A}\right)^{\frac{\lambda+1}{\mu+1}} \frac{1}{\mu+1} \cdot x^{\frac{\lambda-\mu}{\mu+1}} dx,$$

che ha la forma di quella del Riccati.

Questa riduzione non si può fare quando $\mu = -1$; così l'equazione $dy + \frac{Ayydt}{t} = Bt^{\lambda} dt$ non può ridursi all' equazione riccatiana.

§ 236. Terminiamo di parlare della separazione delle variabili, col dare un esempio nel quale essa si ottiene permutando le variabili in quantità angolari. Sia proposta l'equazione

$$(1 + yy) \sqrt{(1 + yy)}\, dx = n\,(y - x)\, dy \sqrt{(1 + xx)}.$$

Facciamo

$$y = tang\, \phi,\ x = tang\, \omega,\ \text{ed avremo } dy = \frac{d\phi}{\cos \phi^2},$$

$$dx = \frac{d\omega}{\cos \omega^2},\ \sqrt{(1 + yy)} = \frac{1}{\cos \phi},\ \sqrt{(1 + xx)} = \frac{1}{\cos \omega},$$

$$\text{e } y - x = \frac{sen\,(\phi - \omega)}{\cos \phi \cos \omega};\ \text{sarà dunque}$$

$$\frac{1}{\cos \phi^3} \cdot \frac{d\omega}{\cos \omega^2} = \frac{n\, sen\,(\phi - \omega)}{\cos \phi \cos \omega} \cdot \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{d\phi}{\cos \phi^2},\ \text{ovvero}$$

$$d\omega = n d\phi\, sen\,(\phi - \omega) = d\phi - (d\phi - d\omega),\ \text{e quindi}$$

$$d\phi \{1 - n\, sen(\phi - \omega)\} = d\phi - d\omega,\ d\phi = \frac{d\phi - d\omega}{1 - n\, sen(\phi - \omega)}.$$

Poniamo $\phi - \omega = \psi$, e sarà

$$\phi = \int \frac{d\psi}{1 - n\, sen\, \psi},\ \text{ed } \omega = \int \frac{d\psi}{1 - n\, sen\, \psi} - \psi;$$

si avranno dunque le variabili x, y espresse per una terza ψ, e l'eliminazione di questa ci darà l'integrale completo della proposta.

§ 237. Talvolta ad un' equazione $Xdx = Ydy$ ove le variabili sono separate, soddisfà una relazione algebratica tra di esse, mentre niuno dei suoi membri è integrabile algebraticamente. Spieghiamo questo paradosso analitico.

Sia $dy \cdot \phi(y)$ una funzione differenziale la quale non possa integrarsi algebraicamente, e prendiamo in vece della y una funzione algebratica della x, e sia $y = fx$; il nostro differenziale diventerà allora $dx \cdot \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot \phi(fx)$: ma se la funzione fx sarà tale che $\left(\frac{df}{dx}\right) \cdot \phi(fx) = \phi(x)$, si avrà $dy \cdot \phi(y) = dx \cdot \phi(x)$: ora in quest' equazione nessun membro sarà integrabile da sè medesimo algebraticamente; pure ad essa soddisfarà la relazione algebratica tra x ed y compresa nell' equazione $y = fx$.

Serva per esempio il differenziale

$\frac{dy}{a + 2by + cy^2}$: se noi facciamo $y = \frac{mx - bx - a}{m + b + cx}$,

si avrà $dy = \frac{m^2 + ac - b^2}{(m + b + cx)^2}\, dx$;

$$a + 2by + cy^2 = a + 2b\,\frac{mx - bx - a}{m + b + cx}$$

$$+ c\left(\frac{mx - bx - a}{m + b + cx}\right)^2 \text{; ovvero}$$

$$a + 2by + cy^2 = \frac{(m^2 + ac - b^2)\,(a + 2bx + cx^2)}{(m + b + cx)^2},$$

pel che vien subito

$\frac{dy}{a + 2by + cy^2} = \frac{dx}{a + 2bx + cx^2}$; ed è manifesto che a quest' equazione differenziale soddisfà

$y = \frac{mx - bx - a}{m + b + cx}$, poichè la sostituzione di questo valore la rende identica.

§ 238. Prendiamo l' equazione semplicissima

$\frac{dx}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$ composta di membri non integrabili algebraticamente : se noi la moltiplichiamo per xy, avremo

$\frac{y \cdot xdx}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{x \cdot ydy}{\sqrt{(aa+yy)}}$, ed integrando a parti, si otterrà

$$y\sqrt{(aa+xx)} - \int dy\sqrt{(aa+xx)} = x\sqrt{(aa+yy)} - \int dx\sqrt{(aa+yy)} + C.$$

Ora l' equazione proposta ci dà

$dx\sqrt{(aa+yy)} = dy\sqrt{(aa+xx)}$, e quindi

$\int dx\sqrt{(aa+yy)} = \int dy\sqrt{(aa+xx)}$; dunque

$y\sqrt{(aa+xx)} = x\sqrt{(aa+yy)} + C$ sarà l' integrale algebratico completo di quell' equazione.

Con lo stesso ripiego potrebbesi ottenere l' integrale algebratico dell' equazione

$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2)}}$; ma essa si può anco ridurre a quella già trattata: basta fare $x = z - \frac{B}{2C}$, $y = u - \frac{B}{2C}$, e si ottiene subito un' equazione di questa forma

$$\frac{dz}{\sqrt{(m+zz)}} = \frac{du}{\sqrt{(m+uu)}}.$$

§ 239. Abbiasi ora l' equazione

$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\pm dy}{a+2by+cy^2}$, della quale si voglia

l' integrale completo, non avendo riguardo alla parziale integrazione dei suoi membri.

A quest' equazione si può dare una forma più semplice, facendo sparire le potenze dispari del denominatore; supporremo dunque che l' equazione da integrarsi sia $\frac{dx}{a+cx^2}=\frac{\pm dy}{a+cy^2}$. Poniamo $X=a+cx^2$, $Y=a+cy^2$, e l' equazione diverrà, prendendo il segno superiore, $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$.

Consideriamo le variabili x ed y come se fossero funzioni di una terza t, ed allora scrivendo $\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)dt$ in vece di dx e dy, avremo $\frac{1}{X}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{Y}\left(\frac{dy}{dt}\right)$: stabiliamo tra x e t tal relazione che sia $\frac{1}{X}\left(\frac{dx}{dt}\right)=1$, e ne seguirà immediatamente $\frac{1}{Y}\left(\frac{dy}{dt}\right)=1$; quindi $X=\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $Y=\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $X-Y=\left(\frac{dx}{dt}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Sostituiamo i valori delle funzioni X, Y, e si avrà

$c(x^2-y^2)=\left(\frac{dx}{dt}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Differenziamo l' equazioni

$X=\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $Y=\left(\frac{dy}{dt}\right)$, e troveremo

$\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)=2cx\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$,

$\left(\frac{dY}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 2cy\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$; quindi

$$2cx = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)},\quad 2cy = \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)},$$ e sommando

$$2c(x+y) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Sia $x - y = q$, e per conseguenza

$\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{dt}\right)$; avremo allora

$c(x^2 - y^2) = \left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{dt}\right)$, ovvero

$c(x+y)(x-y) = cq(x+y) = \left(\frac{dq}{dt}\right)$, e quindi

$2c(x+y) = \frac{2}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right)$. Ma abbiamo trovato

$2c(x+y) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right)$; dunque

$$\frac{2}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right)dt = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}\cdot\left(\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}\right)dt + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dt}\right)}\cdot\left(\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}\right)dt,$$

il cui integrale è

$\log q^2 = \log\left(\frac{dx}{dt}\right) + \log\left(\frac{dy}{dt}\right) + C$; ovvero passando dai logaritmi ai numeri e cangiando la costante,

$Cq^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)$, e quindi $C = \frac{1}{q^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)$: ma

$\left(\frac{dx}{dt}\right) = X = a + cx^2$, $\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y = a + cy^2$; dunque

$C = \frac{(a + cx^2)(a + cy^2)}{(x - y)^2}$.

Quest' ultima relazione algebratica sarà l' integrale completo dell' equazione $\frac{dx}{a + cx^2} = \frac{dy}{a + cy^2}$.

Se ai due membri dell' equazione del ritrovato integrale aggiungiamo $-ac$, e cangiamo di nuovo la forma della costante arbitraria, avremo questa relazione più semplice $C' = \frac{a + cxy}{x - y}$.

§ 240. Prendiamo il segno inferiore, e poniamo $\frac{1}{X}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1$, $-\frac{1}{Y}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 1$; si avrà

$X = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, $Y = -\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Facciamo $x + y = p$, $x - y = q$, $xy = u$, e troveremo

$\left(\frac{dp}{dt}\right) = X - Y = cpq$, ovvero

$\frac{1}{cp}\cdot\left(\frac{dp}{dt}\right) = q$. Per un altro verso

$yX - xY = y\left(\frac{dx}{dt}\right) + x\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right)$; dunque sostituendo per X e per Y i rispettivi valori $a + cx^2$, $a + cy^2$, si avrà $a(y - x) + cxy(x - y) = \left(\frac{du}{dt}\right)$, che diviene $-aq + cuq = \left(\frac{du}{dt}\right)$, $q = \frac{1}{cu - a}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)$.

Eguagliamo adesso tra loro i due valori di q, ed avremo $\frac{1}{cp} \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{1}{cu - a} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)$, l' integrale della quale sarà $cp = C(cu - a)$, essendo C una costante arbitraria: in quest' ultima equazione sostituendo i valori di p e di u, si avrà $C = \frac{c(x+y)}{cxy - a}$.

§ 241. Battendo una consimile strada, giungere si potrebbe all' integrale algebratico dell' equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}},$$ della quale ciascun membro da per sè non può integrarsi, che mercè la rettificazione delle sezioni coniche.

Un siffatto integrale è

$$\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)} + \sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}$$
$$= (x - y)\sqrt{\{\alpha + E(x + y)^2\}},$$ ove α rappresenta una costante arbitraria, e potrà ciascuno verificarlo per mezzo della differenziazione. Ma non è questo il solo integrale algebratico completo che si abbia per siffatta equazione: ve ne sono altri da esso diversi, e che non contengono neppure quantità irrazionali. Non mi fermo a fare il calcolo col quale si ottengono tutti questi integrali, perchè è troppo prolisso. Ciò si potrà trovare nel terzo tomo del mio corso del calcolo sublime. Come poi avvenga che più e diversi integrali possano aversi per quella medesima equazione, si ricaverà dalla esplicazione da me data qui sopra, del mentovato paradosso analitico.

§ 242. Ma ad integrare un' equazione $Pdx + Qdy = 0$ non è necessario sempre separar le variabili; in fatti allora quando il primo membro di essa è l' esatto differenziale di una funzione $\phi(x, y)$ delle variabili x, y, l' integrale dell' equazione è $\phi(x, y) = C$; essendo C la costante arbitraria.

Che poi una proposta equazione $Pdx + Qdy = c$ abbia il primo membro che sia un differenziale esatto, si riconosce dall' esaminare se $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ eguaglia o non eguaglia $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$; nel primo caso l' equazione ha quel pregio, e nel secondo no.

In una data equazione $Pdx + Qdy = 0$, sia $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$: onde averne l' integrale faremo così.

Prenderemo l' integrale del Pdx, risguardando come costante la y. Questo integrale $\int Pdx$ non può differire dall' integrale di tutto il primo membro $Pdx + Qdy$ che per motivo di qualche funzione della y solamente: indichiamo con Y questa funzione, ed allora $\int Pdx + Y = C$ sarà il ricercato integrale. Conviene ora trovare il valore della Y. A tal fine differenzieremo l' equazione $\int Pdx + Y = C$ facendo variare e la x e la y, e confrontando l' equazione che ci verrà con la proposta, ne ricaveremo il valore della Y. Avremmo anco potuto incominciare l' integrazione dal termine Qdy, e l' integrale sarebbe stato allora $\int Qdy + X = C$, ove l' integrazione debbe farsi risguardando x costante, e la funzione X debbe determinarsi in un modo consimile a quello col quale si è determinato Y. L' una e l' altra strada conducono allo stesso risultamento.

§ 243. Dichiariamo questa dottrina con qualche esempio.

1.° Sia proposta l' equazione

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)\, dx + (\beta x + \delta y + \varepsilon)\, dy = 0.$$

Paragonata con la formola generale, si ha

$P = \alpha x + \beta y + \gamma$; $Q = \beta x + \delta y + \varepsilon$, e quindi

$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Questa equazione adunque è un differenziale esatto, e quindi da sè medesima integrabile.

Giusta la regola del § antecedente, si avrà $\int Pdx + Y = C$; ora $\int Pdx = \frac{ax^2}{2} + \beta yx + \gamma x$, quindi $\frac{ax^2}{2} + \beta yx + \gamma x + Y = C$; differenziando quest' equazione e paragonandola con la proposta, si avrà $\left(\frac{dY}{dy}\right) = \delta y + \varepsilon$, $Y = \frac{\delta y^2}{2} + \varepsilon y$; dunque $\frac{ax^2}{2} + \beta yx + \gamma x + \frac{\delta y^2}{2} + \varepsilon y = C$ sarà l' integrale completo.

Saremmo giunti precisamente allo stesso risultamento incominciando l' integrazioni dalla y.

2.° Anche l' equazione $\frac{dy}{y} = \frac{xdy - ydx}{y\sqrt{(xx+yy)}}$,

ovvero $\frac{dx}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}\right) = 0$

è integrabile da sè medesima: in fatti essendo

$P = \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}}$, $Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$, si ha

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{-y}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Ora $\int Pdx = l\{x + \sqrt{(x^2+y^2)}\}$, dunque

$$\left(\frac{dY}{dy}\right) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(x^2 + y^2)}} - \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}\cdot\{x+\sqrt{(x^2+y^2)}\}} = 0;\ Y = 0:$$

l' integrale adunque sarà $l\{x + \sqrt{(x^2+y^2)}\} = C$.

§ 244. Quando l' equazione $Pdx + Qdy = 0$ non è integrabile da sè medesima, può divenirlo moltiplicata con un idoneo fattore: per esempio, l' equazione $ydx - xdy = 0$ diviene da sè stessa integrabile moltiplicandola per $\frac{1}{y^2}$.

Non abbiamo un metodo diretto e generale per trovare i moltiplicatori che rendono integrabili l'equazioni, ed in questa, come in molte altre indagini, conviene contentarsi di regole particolari.

Conosciuto però con qualche ripiego algebratico un moltiplicatore, infiniti altri se ne possono avere: infatti sia $dy + Pdx = 0$ un' equazione proposta, e fingiamo che M sia il moltiplicatore che ne riduce il primo membro un differenziale esatto di una certa funzione f delle variabili x, y. Avremo in questa ipotesi $Mdy + MPdx = df$. Ora il secondo membro di questa equazione si mantiene anco un differenziale esatto, moltiplicandolo per qualunque funzione $\psi(f)$ della f; dunque anche tale si manterrà il primo membro; dunque $\psi(f)\cdot M\{dy + Pdx\}$ sarà un differenziale esatto; dunque anche $\psi(f)\cdot M$ sarà un moltiplicatore il quale rende la proposta equazione da sè medesima integrabile; ma la funzione $\psi(f)$ può avere infinite forme diverse; dunque si avranno infiniti moltiplicatori.

§ 245. Per esempio, cerchiamo tutti i moltiplicatori i quali rendono la formola $aydx + bxdy$, ovvero l' equazione $aydx + bxdy = 0$ integrabile.

Il primo moltiplicatore, il quale si manifesta subito, è $\frac{1}{xy}$, e per esso moltiplicata l' equazione

proposta, si ha $\frac{adx}{x} + \frac{bdy}{y} = 0$, e quindi $alx + bly = C$, ovvero $lx^a y^b = C$ è l' integrale completo. Dunque una funzione qualunque $\psi(x^a y^b)$ moltiplicata per l' idoneo fattore $\frac{1}{xy}$, ci darà la formola $\frac{1}{xy}\psi(x^a y^b)$, la quale rappresenta tutt' i moltiplicatori possibili di quella equazione.

Il moltiplicatore dell' equazione

$$aydx + bxdy = x^m y^n \cdot (gydx + hxdy)$$

si ottiene per mezzo della considerazione dei moltiplicatori i quali separatamente rendono integrabili i di lei due membri.

In fatti tutt' i moltiplicatori i quali rendono integrabile il primo membro, sono contenuti nella formola $\frac{1}{xy}\psi(x^a y^b)$. Il primo moltiplicatore che rende integrabile il secondo membro, è $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$, la cui mercè esso diviene $\frac{gdx}{x} + \frac{hdy}{y}$ che ha per integrale $l(x^g y^h)$. Questo moltiplicatore ci dà la formola $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}\psi(x^g y^h)$ atta a rappresentare tutt' i moltiplicatori di quel secondo membro: ora vediamo di rendere eguali quei due moltiplicatori. Per questo prendiamo le potenze in vece delle funzioni, facciamo, cioè,

$\psi(x^a y^b) = x^{\mu a} y^{\mu b}$,

$\psi(x^g y^h) = x^{\nu g} y^{\nu h}$, e determinando μ, ν in modo che sia

$\frac{1}{xy} x^{\mu a} y^{\mu b} = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} x^{\nu g} y^{\nu h}$, ovvero

$x^{\mu a - 1} y^{\mu b - 1} = x^{\nu g - m - 1} y^{\nu h - n - 1}$, si avrà

$\mu a = \nu g - m$, $\mu b = \nu h - n$, e quindi

$\mu = \frac{gn - hm}{ah - bg}$, $\nu = \frac{an - bm}{ah - bg}$: l'idoneo moltiplicatore

sarà allora $x^{\mu a - 1} y^{\mu b - 1}$, pel quale moltiplicando la proposta, essa diventerà

$$x^{\mu a - 1} y^{\mu b - 1}(aydx + bxdy) = x^{\nu g - 1} y^{\nu h - 1}(gydx + hxdy),$$

ove ciascun membro è integrabile da sè medesimo. L'integrale poi è $\frac{1}{\mu} x^{\mu a} y^{\mu b} = \frac{1}{\nu} x^{\nu g} y^{\nu h} + C$.

§ 246. Dell'equazioni per le quali si può ottenere la separazione delle variabili, facilmente si trova il moltiplicatore: in fatti sia $Pdx + Qdy = 0$ un' equazione differenziale, la quale per una certa tal qual sostituzione di due altre variabili t ed u riducasi ad avere le variabili separate. Supponiamo che, fatta questa sostituzione, si abbia $Pdx + Qdy = Rdt + Sdu$, e che in questa formola $Rdt + Sdu$ per mezzo della divisione per V, il che ci dà $\frac{Rdt + Sdu}{V}$, si trovino le variabili separate; sarà allora $\frac{R}{V}$ una funzione della sola t, e $\frac{S}{V}$ una funzione della sola u. Essendo dunque la formola $\frac{Rdt + Sdu}{V}$ integrabile da sè medesima, sarà ancora integrabile $\frac{Pdx + Qdy}{V}$ ad essa

eguale, purchè in V si ripongano le variabili x, y. Potremo pertanto per mezzo della separazione delle variabili nell' equazione $Pdx + Qdx = 0$ venire in cognizione del fattore $\frac{1}{V}$, pel quale moltiplicata, diviene essa integrabile da sè medesima.

Cerchiamo il moltiplicatore dell' equazione $dy + yydx - \frac{adx}{x^4} = 0$, ch' è uno de' casi d' integrabilità dell' equazione del Riccati.

Facciasi $x = \frac{1}{t}$, ed a causa di $dx = -\frac{dt}{tt}$ la nostra equazione diventerà $dy - \frac{yydt}{tt} + attdt = 0$. Poniamovi $y = t - ttz$, e si avrà $-tt(dz + zzdt - adt) = 0$, equazione che divisa per $tt(zz - a)$ ha le variabili separate: ora

$$tt(zz - a) = \frac{(t-y)^2 - at^4}{tt} = (1 - xy)^2 - \frac{a}{xx};$$

dunque il cercato moltiplicatore sarà $\frac{xx}{xx(1-xy)^2 - a}$, e perciò l' equazione $\frac{x^4dy + x^4yydx - adx}{x^4(1-xy)^2 - axx} = 0$ sarà integrabile da sè medesima. Per avere quest' integrale si riguardi, secondo la regola del § 242, x come costante, e si otterrà integrando rispetto ad y,

$\frac{1}{2\sqrt{a}} l \frac{x(1-xy) + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - x(1-xy)} + X$, essendo X una funzione della x.

Per trovare il valore di questa funzione si differenzj di nuovo, e si avrà

$$\frac{2xydx - dx}{xx(1-xy)^2 - a} + dX = \frac{x^4yydx - adx}{x^4(1-xy)^2 - axx}, \text{ onde}$$

$$dX = \frac{x^4yydx - adx - 2x^3ydx + xxdx}{x^4(1-xy)^2 - axx} = \frac{dx}{xx},$$

ed $X = -\frac{1}{x} + C$: l'equazione integrale sarà dunque

$$l\frac{\sqrt{a} + x(1-xy)}{\sqrt{a} - x(1-xy)} = \frac{2\sqrt{a}}{x} + C.$$

CAPO XI.

Continuazione dell' integrazione dell' equazioni differenziali del primo ordine.

§ 247. Quando un'equazione non si può integrare esattamente, si tenta d' integrarla col mezzo delle serie. Il teorema di Taylor può talvolta servire a questo uso; in fatti sia proposta l' equazione differenziale $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \phi(x, y)$. Indichiamo con y_x quella funzione, la quale a tale equazione soddisfà.

Qualunque sia y_x, si ha sempre

$$y_x = y_0 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{x^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \text{ecc.},$$

ponendo a differenziazioni fatte $x = 0$ nei coefficienti $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ecc.

Conosciuta la funzione y_x, si conoscono facilmente i coefficienti della serie; e conosciuti questi, si viene in cognizione di quella. Sì fatti coefficienti si conoscono appunto mercè la data equazione e i di lei

differenziali, se in essa ed in questi faremo $x=0$; così posto $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\varphi'(x,y)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\varphi''(x,y)$, ecc. si avrà

$$y_x=y_0+x\varphi(0,y_0)+\frac{x^2}{2}\varphi'(0,y_0)$$
$$+\frac{x^3}{2\cdot 3}\varphi''(0,y_0)+\text{ecc.},$$

ove y_0 non essendo dato dall' equazione, rappresenta la costante arbitraria.

§ 248. Può anco adoperarsi il metodo dei coefficienti indeterminati: abbiasi l' equazione $dy+ydx=mx^n dx$. Supponiamo

$y=Ax^{\mu}+Bx^{\mu+1}+Cx^{\mu+2}+$ ecc., e sarà

$dy=\mu Ax^{\mu-1}dx+(\mu+1)Bx^{\mu}dx+(\mu+2)Cx^{\mu+1}dx+$ec.

Fatte ora le opportune sostituzioni nella proposta, avremo

$$\left.\begin{array}{l}\mu Ax^{\mu-1}+(\mu+1)Bx^{\mu}+(\mu+2)Cx^{\mu+1}+\text{ec.}\\ -mx^n\quad+\quad Ax^{\mu}+\quad Bx^{\mu+1}+\text{ec.}\end{array}\right\}=0,$$

che dovrà essere vera per qualunque valore della x; dunque dovrà essere $n=\mu-1$, ovvero $\mu=n+1$,

$A=\frac{m}{\mu}$, $B=\frac{-m}{\mu(\mu+1)}$, $C=\frac{m}{\mu(\mu+1)(\mu+2)}$ ec., e perciò

$$y=m\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right.$$
$$\left.+\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\text{ecc.}\right\}.$$

Dopo, questo valore della y non può risguardarsi come se fosse l' integrale completo, poichè non contiene una costante arbitraria: onde introdurla, rappresentiamo con X quella serie, e facciamo $y = X + z$; avremo allora per determinare z questa equazione $dz + zdx = 0$, e perciò $z = Ce^{-x}$, ove C è una costante arbitraria; dunque l' integrale completo sarà

$$y = m\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right.$$
$$\left. + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{ecc.}\right\} + Ce^{-x}.$$

Ma si può ottenere un' espressione della y dotata di tutta la generalità che possiede un integrale complèto, in quest' altro modo.

Sia $f(x; y, c) = 0$ l' integrale di una qualunque equazione differenziale: l' uso cui è destinata la costante c, quello si è di fare in maniera che quando x riceve un dato valore $x = a$, y ne riceva un altro parimente dato $y = b$. Con questa condizione si determina l' idoneo valore della costante c, risolvendo l' equazione $f(a, b, c) = 0$.

Ora se potremo preparare l' espressione di y in tal guisa che facendovi $x = a$, venga $y = b$, avremo per y un valore che potrà risguardarsi come l' integrale completo della proposta; almeno ne farà intieramente le veci.

Per questo poniamo $x = a + t$, $y = b + u$, e prendiamo per rappresentare u una serie, della quale tutt' i termini svaniscano quando $t = 0$: sia

$$u = At^{\mu} + Bt^{\mu+1} + Ct^{\mu+2} + \text{ecc.},$$

$$du = \mu At^{\mu-1}dt + (\mu+1)Bt^{\mu}dt + (\mu+2)Ct^{\mu+1}dt$$

+ ecc.; e sostituendo questi valori nell' equazione $du + (b + u)\,dt = m(a + t)^{n}dt$, si avrà

$$\left.\begin{array}{l}\mu A t^{\mu-1}+(\mu+1) B t^{\mu}+(\mu+2)\ C t^{\mu+1}+\text{ec.}\\ +\ b\ +\ A t^{\mu}+\ B t^{\mu+1}+\text{ec.}\\ -m a^{n}\ -m \frac{n}{1} a^{n-1} t-m \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} t^{2}-\text{ec.}\end{array}\right\}=0:$$

equazione che, dovendo esser vera per qualunque valore del t, ci darà

$$\mu=1\ ,\ A=ma^n-b\ ,\ B=\frac{mna^{n-1}-ma^n+b}{2},$$

$$C=\frac{mn(n-1)\,a^{n-2}-mna^{n-1}+ma^n-b}{2\cdot 3},\ \text{ecc.};$$

dunque

$$y=b+(ma^n-b)\,(x-a)$$
$$+\left\{\frac{mna^{n-1}-ma^n+b}{2}\right\}(x-a)^2+\text{ecc.}$$

Quest' espressione della y soddisfà alla proposta ed è tale, che fatto $x=a$, si ha $y=b$.

§ 249. Si può avere anco una serie convergente del valore della y in questa guisa.

Supponiamo che a crescendo continuamente con eguali aumenti Δa, divenga in fine x, e che i valori corrispondenti della y siano questi.

b corrispondente ad. . . . a

b'. . . . . $a+\ \Delta a=a'$

b'' . . . . $a+2\Delta a=a''$

b''' . . . . $a+3\Delta a=a'''$

. . . .

$y=b^{(\lambda)}$ . . . . $a+\lambda\Delta a=a^{(\lambda)}=x:$

si avrà allora

$$b' = b + \{ma^n - b\}\Delta a$$
$$+ \left\{\frac{mna^{n-1} - ma^n + b}{2}\right\}(\Delta a)^2 + \text{ecc.}$$

$$b'' = b' + \{ma'^n - b'\}\Delta a +$$
$$\left\{\frac{mna'^{n-1} - ma'^n + b'}{2}\right\}(\Delta a)^2 + \text{ecc.}$$

. . . .

$$y = b^{(\lambda-1)} + \left\{ma^{(\lambda-1)^n} - b^{(\lambda-1)}\right\}\Delta a + \text{ecc.}$$

Si sommino tutte queste equazioni, e ne ricaveremo
$y = b + M\Delta a + N(\Delta a)^2 + L(\Delta a)^3 +$ ecc.

La qual serie tanto più convergerà, quanto minore sarà Δa.

§ 250. In generale se avremo un' equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$, nella quale P e Q siano funzioni della x e della y, e vorremo trovare il valore della y dato per mezzo di una serie ordinata secondo le potenze della x, cominceremo dal fare, anche semplicemente, $y = A + Bx + Cx^2 + Ex^3 +$ ec., pel che avremo $\left(\frac{dy}{dx}\right) = B + 2Cx + 3Ex^2 +$ ecc. Sostituendo allora questi valori in $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{P}{Q}$, avremo $-\frac{P}{Q} = B + 2Cx + 3Ex^2 +$ ecc., da cui $P + Q(B + 2Cx + 3Ex^2 + \text{ecc.}) = 0$. Quivi se sostituiremo in P e Q in vece dell' y il valore esposto, ed ordineremo l' equazione risultante secondo le potenze della x, avremo l' equazioni particolari atte a determinare quei coefficienti A, B, ecc.

Per esempio: sia l' equazione $ady + (y - x)dx = 0$, e fatto $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ ecc., avremo $\{A + (B - 1)x + Cx^2 + Dx^3 +$ ecc.$\} + Ba + 2Cax + 3Dax^2 +$ ecc. $= 0$, che ci darà

$$B = -\frac{A}{a},\ C = \frac{A + a}{2a^2},\ D = -\frac{A + a}{2 \cdot 3 \cdot a^3},$$

$$E = \frac{A + a}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^4}\ \text{ecc., ed in conseguenza}$$

$$y = A - \frac{A}{a}x + \frac{A + a}{2a^2}x^2 - \frac{A + a}{2 \cdot 3 \cdot a^3}x^3 + \text{ecc.}$$

Quest' integrale sarà completo, perchè contiene la costante arbitraria A.

§ 251. Supponiamo che l' integrale completo di un' equazione differenziale del primo ordine, cioè tra x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, sia $y = f(x, a)$, essendo a la costante arbitraria. Dando ad a un valore particolare h, la quantità $f(x, h)$ sarà un valore particolare della y, che noi rappresenteremo con p, e che supporremo conosciuto in qualche modo. Facciamo frattanto $a = h + i$, e sviluppiamo la funzione $f(x, h + i)$ in serie ascendente secondo le potenze della i: il primo termine sarà $f(x, h) = p$, e gli altri termini saranno della forma $qi + ri^2 +$ ecc., q, r essendo delle funzioni della x. Se si sostituisce quest' espressione della y nella data equazione, converrà ch' essa si verifichi indipendentemente dalla costante i, che dee dimorare arbitraria.

Sia dunque $\left(\frac{dy}{dx}\right) = F(x, y)$ l' equazione, del primo ordine alla quale soddisfà il valore particolare $y = p$; si avrà dunque $\left(\frac{dp}{dx}\right) = F(x, p)$.

Sostituiamo in vece della y la serie $p + qi + ri^2$ $+$ ecc., ed in vece del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ la serie $\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) i$ $+ \left(\frac{dr}{dx}\right) i^2 +$ ecc., e si avrà primieramente

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) i + \left(\frac{dr}{dx}\right) i^2 + \text{ec.} = F(x, p + qi + ri^2 + \text{ec.}).$$

Poniamo $qi + ri^2 + \text{ecc.} = \omega$, e scrivendo F in vece della $F(x, p)$, si avrà

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) i + \left(\frac{dr}{dx}\right) i^2 + \text{ecc.} = F(x, p)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dp}\right) \omega + \left(\frac{d^2F}{ap^2}\right) \frac{\omega^2}{2} + \text{ecc.}, \text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) i + \left(\frac{dr}{dx}\right) i^2 + \text{ecc.} = F(x, p)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dp}\right) (qi + ri^2 + \text{ecc.}) + \left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) \frac{1}{2} (q^2 i^2$$
$$+ 2qri^3 + \text{ecc.}) + \text{ecc.} = F(x, p) + \left(\frac{dF}{dp}\right) qi$$
$$+ \left\{ r \left(\frac{dF}{dp}\right) + \frac{1}{2} q^2 \left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) \right\} i^2 + \text{ecc.}$$

Ora $\left(\frac{dp}{dx}\right) = F(x, p)$; dunque $\left(\frac{dq}{dx}\right) = q \left(\frac{dF}{dp}\right)$,

$\left(\frac{dr}{dx}\right) = r \left(\frac{dF}{dp}\right) + \frac{q^2}{2} \left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)$, ecc.; queste equazioni serviranno a determinare successivamente le incognite q, r, ecc. Esse sono lineari del primo ordine; possono in conseguenza sempre integrarsi completamente; ma per noi basteranno anche gl'integrali

particolari di esse. In questa guisa avendo determinati i valori di q, r, ecc., si avrà questo valore completo della y

$y = p + qi + ri^2 +$ ecc., nel quale i sarà la costante arbitraria che mancava al valore particolare $y = p$. Questo valore è in vero espresso per una serie, ma la convergenza di questa serie dipenderà dal valore della costante i.

§ 252. Per farne un esempio, sia proposta l'equazione differenziale

$$4ydy - 3xdx - dx\sqrt{(4y^2 - 3x^2)} = 0.$$

A questa soddisfà l'integrale particolare $y = x$. Per averne il completo, diamogli questa forma

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{3x + \sqrt{(4y^2 - 3x^2)}}{4y},$$ e si avrà

$$F(x, y) = \frac{3x + \sqrt{(4y^2 - 3x^2)}}{4y}, \ p = x,$$

$$F(x, p) = \frac{3x + \sqrt{(4p^2 - 3x^2)}}{4p},$$

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) = \frac{1}{\sqrt{(4p^2 - 3x^2)}} - \frac{3x + \sqrt{(4p^2 - 3x^2)}}{4p^2},$$

$$\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) = \frac{-4p}{(4p^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{p\sqrt{(4p^2 - 3x^2)}}$$

$$+ 2 \cdot \frac{3x + \sqrt{(4p^2 - 3x^2)}}{4p^3}, \text{ ecc.}$$

Facciamo ora $p = x$, ed avremo

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} = -\frac{3}{x^2}, \text{ ecc.}$$

L'equazioni per determinare q, r, ecc. saranno dunque $\left(\frac{dq}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{dr}{dx}\right) = -\frac{q^2}{2} \cdot \frac{3}{x^2}$ ecc.; quindi $q = c$, $r = \frac{3c^2}{2} \cdot \frac{1}{x} + c'$ ecc., essendo c, c' costanti arbitrarie.

Siccome ci bastano i valori particolari di q, r ecc., così facciamo $c = \frac{1}{2}$, $c' = 0$, ed avremo $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x}$ ecc.: sarà pertanto il valore completo dell' y, $y = x + \frac{i}{2} + \frac{3i^2}{8x} +$ ecc., essendo i la costante arbitraria. Che questa appunto sia la serie ch' esprime il completo valore dell' y, si rileverà dall' osservare che l' integrale completo di quell' equazione è $y^2 = x^2 + ax + a^2$, il quale diventa $y = x$, quando $a = 0$; e per qualunque valore della costante a si trova

$$y = x\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right)^2 + \text{ecc.}\right\}$$

$$= x\left\{1 + \frac{a}{2x} + \frac{3a^2}{8x^2} + \text{ecc.}\right\} = x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{8x} + \text{ecc.},$$

la qual serie combina con quella trovata con l' altro metodo.

Un tal metodo è il fondamento delle soluzioni dei principali problemi della teoria dei pianeti: siccome le eccentricità e le inclinazioni che debbonsi riguardare come costanti arbitrarie, sono piccolissime, e l' effetto delle attrazioni è anche piccolissimo,

il circolo dà subito dei valori particolari i quali si completano in seguito per mezzo di serie ordinate secondo le potenze di queste costanti piccolissime.

§ 253. Prendiamo a considerare quell' equazioni differenziali nelle quali, indicando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ con p, si trova p elevato a potenze maggiori dell' unità.

Sia proposta l' equazione differenziale $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \alpha\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \beta\left(\frac{dy}{dx}\right) + \delta = 0$ nella quale α, β, δ rappresentano delle funzioni date dalla x e dalla y.

Risoluta quest' equazione per riguardo a $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, siano le sue tre radici $\left(\frac{dy}{dx}\right) = q, = r, = s$, e si avrà $\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - q\right\}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - r\right\}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - s\right\} = 0$: ciascuna delle tre equazioni $\left(\frac{dy}{dx}\right) - q = 0$, $\left(\frac{dy}{dx}\right) - r = 0$, $\left(\frac{dy}{dx}\right) - s = 0$, integrata che sia, ci darà per y un valore, o in generale una relazione tra x ed y, che soddisfarà alla equazione differenziale proposta: si avranno in questa guisa tre integrali completi.

Se noi indichiamo con $f(x, y, a) = 0$, $f'(x, y, b) = 0$, $f''(x, y, c) = 0$ questi tre integrali completi, a, b, c essendo le costanti arbitrarie, anche il loro prodotto $(A) \ldots . f(x, y, a) \cdot f'(x, y, b) \cdot f''(x, y, c) = 0$ soddisfarà all' equazione proposta, e rappresenterà anche il di lei integrale completo.

§ 254. Per farne un esempio, prendiamo ad integrare l' equazione $dy^2 - 5gxdxdy + 6g^2x^2dx^2 = 0$: questa si cangia in quest' altra

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5gx\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6g^2x^2 = 0$. Le due radici di quest' equazione sono $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2gx$, $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3gx$, le quali danno $y = gx^2 + a$, $y = \frac{3gx^2}{2} + b$, essendo a, b due costanti arbitrarie: le integrali dunque saranno

$$y - gx^2 - a = 0,\ y - \frac{3gx^2}{2} - b = 0;$$

$$(y - gx^2 - a)\left(y - \frac{3gx^2}{2} - b\right) = 0.$$

Nella stessa guisa essendo proposta l' equazione $dy^2 - g^2dx^2 = 0$, si comincerebbe a ridurla a $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - g^2 = 0$, e troveremmo questi integrali

$$y - gx + a = 0,\ y + gx + b = 0,$$

$(y - gx + a)(y + gx + b) = 0$, nei quali a, b sono due costanti arbitrarie.

§ 255. Prendiamo a risolvere un problema meccanico.

Supponiamo che un corpo grave liberamente cadendo per una data altezza $AL = a$ (*Fig.* 20), debba in A incontrare una curva tale, che scorrendo nella sua concavità ABC, il tempo impiegato nel descrivere qualunque arco AB stia alla lunghezza della corda corrispondente AB nella ragion costante del tempo impiegato a percorrere AL alla medesima altezza AL.

Chiamando $AP = x$, $PB = y$, sarà la corda $AB = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. La velocità del corpo in B è proporzionale alla radice dell' altezza $a + y$; così indicando con v questa velocità, sarà $v = \sqrt{(a + y)}$.

Secondo ciò che noi abbiamo detto altrove, si ha $v=\left(\frac{ds}{dt}\right)$, rappresentando con s l'arco AB, e con t il tempo impiegato a percorrere l'arco stesso AB: ora se noi consideriamo s e t come funzioni della x, avremo la velocità $v=\left(\frac{ds}{dx}\right):\left(\frac{dt}{dx}\right)$, da cui si ricava

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)=\frac{1}{v}\cdot\left(\frac{ds}{dx}\right)=\frac{1}{\sqrt{(a+y)}}\cdot\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

e quindi $t=\int\frac{dx}{\sqrt{(a+y)}}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$.

Siccome nel moto uniformemente accelerato le velocità sono proporzionali ai tempi, avremo perciò da $\sqrt{a}$ espresso il tempo impiegato a descrivere AL, ed il rapporto tra questo tempo e lo stesso spazio sarà $\frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}$.

L'equazione dunque da cui dipende la soluzione del problema, sarà $\frac{t}{Corda.\,AB}=\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Differenziamo quest' equazione, ed avremo

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{\sqrt{(a+y)}}=\frac{x+y\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

che è un' equazione differenziale del primo ordine del secondo grado. Se noi facciamo $\left(\frac{dy}{dx}\right)=p$ e quadriamo, otterremo l' equazione

$$a\,(x^2p^2-2xyp+y^2)=y\,(y^2p^2+2xyp+x^2),$$

la radice della quale è

$(xp-y)\sqrt{a}=(x+yp)\sqrt{y}$, che diviene $(xdy-ydx)\sqrt{a}=(xdx+ydy)\sqrt{y}$, avendovi riposto $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ per p, e tutta in seguito moltiplicata per dx.

Per integrare quest' ultima equazione, si faccia $y=\frac{uz}{a}$, $x=\frac{z\sqrt{(a^2-u^2)}}{a}$, e si trasforma essa nella $\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{adu}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(a^4-u^4)}}$, nella quale le variabili sono separate, ed il di lei integrale dipende perciò dalle quadrature.

Questo problema è quello della curva *isocrona paracentrica*, proposto da Leibniz ai Cartesiani nel 1689.

§ 256. Spesso senza la risoluzione dell' equazioni, che il più delle volte non può farsi, si ottiene in certi casi particolari l' integrazione.

Rappresentando con p la quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, supponiamo che si abbia un' equazione tra x e p. Quando mai fosse più facile determinare x con p che p con x, si avrà la relazione tra x ed y in questa maniera. Sia $x=P$, indicando con P una funzione data di p, e differenziando, si avrà

$dx=dx\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dP}{dp}\right)$, ovvero $dx=dP$: ma

$dy=\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=pdx$, dunque $dy=pdP$, e di qui si ricava $y=\int pdP=pP-\int Pdp$: avremo pertanto $x=P$, $y=pP-\int Pdp$; onde le due variabili x, y essendo date per mezzo di una terza p, si conoscerà la relazione che hanno tra loro, mercè l' eliminazione della medesima p. Questa relazione sarà l' integrale

completo della proposta, perchè conterrà una costante arbitraria portata dal segno d'integrazione che ritrovasi nel valore della y.

Talvolta giova esprimere le due variabili x e p per mezzo di una terza u, onde più facilmente ottenere il cercato integrale. Così se noi supponiamo d'aver trovato $x = U$, $p = V$, essendo U, V due funzioni della stessa variabile u, avremo, differenziando rispetto ad u, $\left(\frac{dx}{du}\right) du = dx = dU$, e $dy = pdx = VdU$; quindi $y = \int VdU$: allora le due variabili x, y saranno espresse per mezzo di una terza u, dall'eliminazione della quale si avrà la relazione voluta.

Per esempio, ridotta l'equazione

$xdx + ady = b\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ alla forma

$x + ap = b\sqrt{(1 + p^2)}$, si ha subito

$x = -ap + b\sqrt{(1 + p^2)} = P$; dunque

$$y = p\{b\sqrt{(1 + p^2)} - ap\} + \frac{1}{2}ap^2 - b\int dp\sqrt{(1 + p^2)};$$

e l'integrale sarà il risultamento dell'eliminazione della p.

Nell'equazione $x^3 + p^3 = apx$ faccio $p = ux$, ed ho $x + u^3x = au$, e quindi

$$x = \frac{au}{1 + u^3},\ \text{e}\ p = \frac{au^2}{1 + u^3}.\ \text{Ora}\ dx = \frac{adu(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^2},\ \text{onde}$$

$$dy = pdx = \frac{a^2u^2du(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3},\ \text{ed integrando}$$

$$y = a^2\int\frac{u^2du(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3} = \frac{1}{6}a^2 \cdot \frac{2u^3 - 1}{(1 + u^3)^2} + a^2\int\frac{u^2du}{(1 + u^3)^2},\ \text{ovvero}$$

$$y = \frac{1}{6}a^2 \cdot \frac{2u^3 - 1}{(1 + u^3)^2} + \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{1 + u^3} + cost.$$

§ 257. Quando in un' equazione differenziale tra x, y e $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, le due variabili x, y compongono lo stesso numero di dimensioni, o quando le equazioni rispetto a queste variabili sono omogenee, allora possiamo anche aver l' integrale in questa guisa.

Facciamo $y = ux$; si manderà via la quantità x per mezzo della divisione, e si avrà un' equazione tra le due quantità u e p, dalla quale potremo determinare l' una per l' altra. Ora essendo $y = ux$, si ha $dy = udx + xdu$, e quindi essendo $dy = pdx$, sarà $pdx - udx = xdu$. Quest' ultima equazione ci dà $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, ed integrando $lx = \int\frac{du}{p-u}$, si avrà in questa maniera x dato per mezzo della u, giacchè supponiamo d' aver sostituito in vece di p il suo valore fatto con u, per cui $\frac{du}{p-u}$ diviene sola funzione di u. Trovato il valore della x, si avrà subito quello della y dato ancor esso per mezzo della u, e saranno in questa guisa le due variabili determinate in virtù di una terza, dall' eliminazione della quale ne risulterà l' integrale completo.

Quando fosse più facilmente determinabile u per mezzo del p, che p per mezzo dell' u, allora in vece della formola $\int\frac{du}{p-u}$ potrebbe adoprarsi la formola $-l(p-u) + \int\frac{dp}{p-u}$, che è ad essa eguale. Sia, per esempio, l' equazione omogenea

$ydx - xdy = nx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ovvero

$y - xp = nx\sqrt{(1 + pp)}$. Facendo $y = ux$ e dividendo per x, si ha

$u - p = n\sqrt{(1 + pp)}$; ora essendo

$lx = -l(p-u) + \int \frac{dp}{p-u}$, avremo

$lx = -ln\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{dp}{n\sqrt{(1+pp)}}$, quindi

$lx = cost - ln\sqrt{(1+pp)} - \frac{1}{n}\, l\{p + \sqrt{(1+pp)}\}$;

e passando dai logaritmi ai numeri e mutando la forma della costante, sarà

$$x = \frac{C}{\sqrt{(1+pp)} \cdot \{p + \sqrt{(1+pp)}\}^{\frac{1}{n}}},\ \text{ovvero}$$

$$x = \frac{C\{\sqrt{(1+pp)} - p\}^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{(1+pp)}},\ \text{ed in conseguenza}$$

$$y = \frac{C\{p + n\sqrt{(1+pp)}\}}{\sqrt{(1+pp)}}\{\sqrt{(1+pp)} - p\}^{\frac{1}{n}};$$

così le due variabili x, y saranno date per mezzo della terza p. Se supponiamo $n = 1$, avremo

$$x = \frac{C\{\sqrt{(1+pp)} - p\}}{\sqrt{(1+pp)}},\ y = \frac{C}{\sqrt{(1+pp)}},\ \text{quindi}$$

$$x = y\{\sqrt{(1+pp)} - p\} = y\left\{\frac{C}{y} - p\right\},$$

$$p = \frac{C-x}{y},\ pp = \frac{(C-x)^2}{y^2},\ pp + 1 = 1 + \frac{(C-x)^2}{y^2},$$

$$\frac{C^2}{y^2} = 1 + \frac{(C-x)^2}{y^2},\ \text{ed in fine } y^2 + x^2 = 2Cx.$$

§ 258. Talvolta si giunge all' integrale completo di un' equazione differenziale del primo ordine per

mezzo di un ripiego che dipende dalla medesima differenziazione.

Se proposta un' equazione tra x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ricaveremo da essa in qualche modo un' equazione differenziale del secondo ordine, quindi se con qualche ripiego potremo trovare un' equazione del primo ordine, che a quella del secondo soddisfaccia, e che nel tempo stesso contenga una costante arbitraria a, allora per mezzo della proposta e della ritrovata equazione, eliminando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si avrà una relazione tra x, y e la costante arbitraria a, la quale sarà l' integrale completo della proposta medesima; in fatti tutte queste equazioni dovendo essere vere nel tempo stesso, appartengono tutte alla medesima relazione di variabili. Un esempio renderà più chiara questa teorica.

Sia l' equazione differenziale
$ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: se in questa facciamo $\left(\frac{dy}{dx}\right) = p$, si ha $y - px = a\sqrt{(1 + p^2)}$: ora differenziamo quest' equazione, ed avremo
$dy - pdx - xdp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+p^2)}}$: ma $dy = pdx$; dunque
$-xdp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ovvero $\left\{\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + x\right\}dp = 0$.
Quest' ultima equazione ci dà $dp = 0$,

$$(1)\ldots\ldots p = cost = C, \quad (2)\ldots\ldots \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + x = 0.$$

Se pertanto eliminiamo p con la proposta equazione e con la (1), avremo l' equazione $y = Cx + a\sqrt{(1 + CC)}$ che rappresenterà l' integrale completo. Se con la proposta avessimo combinata l' equazione (2), avremmo trovata tra x e y la relazione

$y\sqrt{(a^2-x^2)} = a^2 + x^2$, la quale non può far le veci dell' integrale completo perchè non contiene la costante arbitraria.

§ 259. Un' equazione differenziale del primo ordine considerata rispetto alla geometria, contiene sempre la relazione tra una tangente e le coordinate di una curva. In fatti la quantità $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$ esprime sempre la tangente dell' angolo, che la tangente condotta al punto della curva, cui corrispondono le coordinate x, y, fa con l' asse, ed un' equazione del primo ordine contiene sempre le quantità x, y e p.

Una tale equazione pertanto dà il valore della suddetta tangente espresso per mezzo delle coordinate della curva.

E siccome la tangente, la suttangente, la normale e la sunnormale sono conosciute quando è conosciuto il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, quindi è che, data una equazione differenziale del primo ordine, si potranno avere i valori di queste linee espressi per x ed y, col sostituire nelle formole che le rappresentano, in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ il valore che si ricava dall' equazione differenziale: bisognerebbe poi sapere la relazione che passa tra x ed y, onde avere l' espressioni della tangente ecc., solo date per mezzo della x.

Quando la curva è conosciuta mercè di una equazione tra x, y ed un parametro costante a, per esempio $\phi(x, y, a) = 0$, per mezzo del calcolo differenziale si passa da questa cognizione a quella delle quantità tangente, suttangente, normale e sunnormale, appartenenti ad un qualunque punto della curva: e *vice versa* quando si conoscerà l' espressione di una di queste linee, cioè quando sarà data una funzione $f(x, y)$ della x e della y che eguagli la detta linea, ed in generale quando ricercheremo una

curva per mezzo di qualche proprietà che appartenga a quantità espresse per mezzo delle x, y e $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, per trovare l'equazione di quella curva adoprar converrà il calcolo integrale; l'equazione data in fatti sarà una differenziale del primo ordine, dalla quale si dee ricavare la relazione tra le coordinate x, y, che rappresenti la curva, cui conveniva la data tangente o suttangente, ecc. Per questo motivo i primi coltivatori del calcolo differenziale ed integrale hanno chiamato *metodo diretto delle tangenti* il differenziale, e *metodo inverso delle tangenti* l'integrale.

§ 260. Data un' equazione tra le due coordinate x, y ed un parametro costante a, per esempio $\phi(x; y, a) = 0$, possiamo sempre da essa dedurne un' altra tra le stesse x, y e la quantità $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, senza che vi si ritrovi alcuna traccia di quella costante: concluderemo pertanto che la proprietà geometrica contenuta in una tale equazione differenziale è affatto indipendente da quel parametro a, o è la stessa, qualunque valore egli abbia: dunque quella proprietà geometrica spetta a tutta la famiglia di curve espressa dall'equazione $\phi(x, y, a) = 0$.

Io chiamo *famiglia di curve* quell' immenso numero di curve che si possono avere dall' equazione $\phi(x, y, a) = 0$, dando ad a i valori che a noi piace.

In generale trovato per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ un valore che appartenga a tutte le curve contenute in una data famiglia, potremo egualmente avere dei rapporti tra le linee tangente, suttangente, normale e sunnormale, e le coordinate x, y, i quali non solo convengano alla curva particolare dalla quale si sono

dedotti, ma nel tempo stesso a tutte le altre infinite curve della stessa famiglia. Così l' equazione differenziale che contiene uno di questi rapporti, non rappresenta all' occhio del geometra una sola curva ed unica, ma una famiglia d' infinite curve, per ciascuna delle quali quell' equazione è buona; ed ecco spiegato ciò che ho promesso di mostrare, cioè, come l' equazioni differenziali sono infinitamente più generali di quelle da cui sono state ricavate.

Per esempio, l' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ ci rappresenta un circolo, e quello appunto che ha per raggio a. Se per mezzo della differenziazione eliminiamo questo raggio, avremo l' equazione differenziale $y^2 - x^2 = 2yx\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Di qui si ricava l' equazione $y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(y+x)(y-x)}{2x}$, il di cui primo membro rappresenta la sunnormale; dunque concluderemo che qualunque sia il raggio di un circolo, la sunnormale è sempre la quarta proporzionale dopo i tre termini $2x$; $y+x$, $y-x$.

Questa proprietà che si può ritrovare anche per mezzo della semplice geometria, appartiene alla famiglia dei circoli; così mentre l' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ solo dipinge alla nostra mente un circolo che ha per raggio a, quella $y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(y+x)(y-x)}{2x}$ ce ne rappresenta uno qualunque.

CAPO XII.

Integrazione delle equazioni differenziali del secondo ordine.

§ 261. Dicesi *integrale primo completo* di una equazione del secondo ordine, che io rappresento con $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\}$, un'altra equazione differenziale del primo ordine la quale contenga una costante arbitraria, e tale che eliminando da essa questa costante, mercè della differenziazione, ne venga la stessa equazione del secondo ordine. Chiamasi poi *integrale finito completo* un' equazione tra x ed y senza differenziale, ma con due costanti arbitrarie, e tale che, queste eliminate, ne torni l' equazione del secondo ordine proposta.

Se il secondo membro della proposta equazione del secondo ordine è funzione soltanto della x, se ne può avere allora l' integrale finito e completo. In fatti in questo caso si ha

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2 = \Psi (x)\, dx^2$, e quindi

$y = \int dx \int \Psi (x)\, dx + Cx + C.$

E se il secondo membro dell' equazione fosse una sola funzione della y, moltiplicando tutta l' equazione per $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, avremmo

$\left(\frac{dy}{dx}\right) \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx = \Psi (y) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$. Facciasi nel primo membro $\left(\frac{dy}{dx}\right) = p$, ed allora sarà

$p\left(\frac{dp}{dx}\right) dx = pdp = \Psi(y)\, dy$, e quindi
$p^2 = 2\int\Psi(y)\cdot dy + C.$

Ora quest' ultima equazione ci darà
$p = \sqrt{\{C + 2\int\Psi(y)\cdot dy\}}$, e perciò
$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = dx\sqrt{\{C + 2\int\Psi(y)\cdot dy\}}$, ed in fine

$$x = \int\frac{dy}{\sqrt{\{C + 2\int\Psi(y)\cdot dy\}}} + C'.$$

Sia il secondo membro una sola funzione del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e facendo anco allora $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, si avrà $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \Psi(p)$, perciò $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx = dp = \Psi(p)\cdot dx$, e quindi

$$\frac{1}{\Psi(p)}\cdot dp = dx, \int\frac{1}{\Psi(p)}\, dp = x + C.$$

Supponiamo che, fatta l' integrazione indicata in quest' ultima equazione, si trovi $p = \phi(x + C)$, essendo $\phi(x + C)$ una funzione cognita di $x + C$; si avrà allora $pdx = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = dy = \phi(x + C)\cdot dx$, ed in conseguenza $y = \int\phi(x + C)\cdot dx + C'$, essendo al solito C, C' due costanti arbitrarie.

Ma anco senza trovare il valore del p potremo aver l' integrale. Ottenuto in fatti $dx = \frac{1}{\Psi(p)}\, dp$, se moltiplichiamo questa equazione per p, avremo $pdx = dy = \frac{pdp}{\Psi(p)}$, ed in conseguenza

$x = \int \frac{1}{\Psi(p)} dp$, $y = \int \frac{pdp}{\Psi(p)}$: in questo modo le due variabili x, y saranno espresse per mezzo di una terza p, e l' integrale completo risulterà dalla eliminazione del p.

Per esempio, debbasi integrare l' equazione

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} = a,$$ la quale determina la curva, il cui raggio di curvatura è costante; se vi facciamo

$p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, avremo $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp} dx = a$, e quindi

$dx = \frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$, $dy = \frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Integrando queste due equazioni, si trova $x = A + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$,

$y = B - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, dalle quali eliminando il p, si ottiene $(x-A)^2 + (y-B)^2 = aa$, che è l' equazione del circolo.

Avremmo trovato lo stesso risultamento, ricavando il valore del p dall' equazione

$x = A + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, ed integrando di poi pdx, onde avere il valore della y.

§ 262. L'equazione del secondo ordine, posta al § antecedente, in due casi può sempre ridursi all'integrazione dell'equazioni del primo ordine. Il primo quello si è quando il secondo membro è una funzione della x e del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ senza y; il secondo, quando nel secondo membro manca la x.

Nel primo caso in fatti si ha $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=f\left\{x,\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$. Ora facendo $\left(\frac{dy}{dx}\right)=p$, si trova $\left(\frac{dp}{dx}\right)=f(x,p)$, ovvero $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx=dx f(x,p)=dp$; dunque rappresentando con $\frac{P}{Q}$ la funzione $f(x,p)$, si avrà $Qdp=Pdx$, essendo P, Q funzioni conosciute della x e del p: l'integrazione pertanto dell'equazione di secondo ordine dipenderà dall'integrazione di una del primo $Qdp=Pdx$ tra le due variabili x, p.

Per esempio. Sia l'equazione

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}=X,$$ ove X è funzione della x: si ricava subito $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{X}$, e perciò

$dp=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{X}dx$, ovvero $\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=\frac{dx}{X}$; questa

integrata, si ha $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=\int\frac{dx}{X}+cost.$

Sia $V=\int\frac{dx}{X}+C$, e si avrà

$p=\frac{V}{\sqrt{(1-VV)}}$; quindi

$$pdx=dy=\frac{Vdx}{\sqrt{(1-VV)}},\ y=\int\frac{Vdx}{\sqrt{(1-VV)}}+cost.$$

Quest' ultima equazione tra x ed y sarà l' integrale finito completo della proposta. Supponendo $X=\frac{aa}{2x}$, si ha $V=\int\frac{2xdx}{aa}=\frac{x^2+C}{aa}$, ed in seguito $y=\int\frac{(x^2+C)\,dx}{\sqrt{\{a^4-(x^2+C)^2\}}}+c$. Da sì fatta equazione è rappresentata la curva i cui raggi di curvatura seguono la ragione inversa dell' ascisse.

Nell'altro caso l'equazione è $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\psi\left\{y,\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$.

In quest' equazione i differenziali sono presi relativamente alla variabile x: permutiamola dunque in un' altra nella quale le differenziali siano relative alla variabile y; per questo noi porremo $\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$ in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e $-\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right):\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$ in vece di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$: ciò fatto, la proposta non conterrà altre variabili che y, $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)$, ed apparterrà al caso precedente.

Di fatto se faremo $p = \left(\frac{dx}{dy}\right)$, avremo un' equazione tra y, p e $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, come sopra l'avevamo tra y, p e $\left(\frac{dp}{dx}\right)$.

§ 263. Quando in un' equazione differenziale del secondo ordine, attribuendo a $\left(\frac{dy}{dx}\right) = p$ nessuna dimensione, a $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = q$ una dimensione negativa, ed alle variabili x, y una dimensione per ciascuna, tutt' i di lei termini hanno lo stesso numero di dimensioni; essa può ridursi ad essere del primo.

Data dunque un' equazione di tal sorte, incominceremo dal toglierle l' aspetto differenziale, introducendo in essa p e q; quindi fatto $y = ux$, $q = \frac{v}{x}$, ne scacceremo la x per mezzo della divisione, ed avremo allora un' equazione tra u, v e p, colla quale si determinerà una di queste quantità per mezzo delle altre due; di poi, osservando che $dy = pdx$, si avrà $udx + xdu = pdx$, e da questa ricaveremo $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$: per un altro verso essendo $dp = qdx$, avremo $dp = \frac{vdx}{x}$, da cui $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{v}$. Eguagliamo i due valori del $\frac{dx}{x}$, ed otterremo $\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{v}$ ovvero

$(E) \ldots\ldots vdu = pdp - udp$. Se ora in vece del v poniamo nell' equazione (E) il suo valore fatto con p e con u, avremo un' equazione differenziale del primo ordine tra le due variabili u e p, l' integrale della quale ci darà p espresso per mezzo dell' u. Ciò ottenuto, porremo il valore del p nell' equazione

$\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$, ed avremo x dato per mezzo dell'u; se in fine in quest' equazione porremo $\frac{y}{x}$ in vece dell'u, si avrà l' integrale completo della proposta, il quale conterrà due costanti arbitrarie, introdotte dalle due integrazioni che avrem fatte. Dunque ogni qual volta l' equazione (E) del primo ordine si potrà integrare, sarà anche integrabile l' equazione del secondo ordine proposta. Un esempio schiarirà la teorica.

§ 264. Sia l' equazione
$x^2ddy = xdxdy + nydx^2$. Questa si trasforma in
$x^2q = xp + ny$, nella quale porremo $y = ux$, $q = \frac{v}{x}$,
ed avremo $v = p + nu$. L'equazione (E) pertanto sarà
$(p + nu)\, du = pdp - udp$, ovvero
$nudu + pdu + udp = pdp$, il cui integrale è
$\frac{nu^2}{2} + pu = \frac{p^2}{2} - \frac{C}{2}$. Quest' equazione ci dà
$p = u + \sqrt{\{C + (n+1)\, u^2\}}$: avremo dunque
$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{\{C + (n+1)\, u^2\}}}$, ed in conseguenza

$$lx = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}}\, l\, \frac{u\sqrt{(n+1)} + \sqrt{\{C + (n+1)\, u^2\}}}{D},$$

ovvero

$$Dx^{\sqrt{(n+1)}} = u\sqrt{(n+1)} + \sqrt{\{C + (n+1)\, u^2\}},$$

essendo D e C due costanti arbitrarie.

Quest' integrale si riduce anco più semplice, e diviene

$$D^2x^{2\sqrt{(n+1)}} - 2Dx^{\sqrt{(n+1)}} \cdot u\sqrt{(n+1)} = C;$$

e mutando la forma delle costanti arbitrarie, cioè facendo $D = A\sqrt{(n+1)}$, $C = B(n+1)$, avremo $A^2 x^{2\sqrt{(n+1)}} - 2Ax^{\sqrt{(n+1)}} \cdot u = B$. In fine sostituendo il valore dell'$u = \frac{y}{x}$ in quest' equazione, si ha l' integrale completo della proposta

$A^2 x^{2\sqrt{(n+1)}} - 2Ax^{\sqrt{(n+1)}-1} y = B$, ovvero

$y = -\frac{B}{2A} x^{1-\sqrt{(n+1)}} + \frac{A}{2} x^{1+\sqrt{(n+1)}}$, ovvero

$y = Ex^{1-\sqrt{(n+1)}} + Fx^{1+\sqrt{(n+1)}}$, indicando E, F due nuove costanti arbitrarie.

§ 265. Taluna volta l' integrazione di un' equazione differenziale del secondo ordine si riduce a quella di una del primo, facendo

$y = x^n u$, $p = x^{n-1} t$, $q = x^{n-2} v$, ove v, t, u

rappresentano quantità variabili, e n un esponente costante indeterminato: ciò succede quando un' idonea determinazione della n fa sì che la x si trovi elevata in ciascun termine alla medesima potenza, e quindi possa per mezzo della divisione farsi sparire dal calcolo. In fatti essendo $dy = pdx$, $dp = qdx$, quelle supposizioni ci daranno $xdu + nudx = tdx$, $xdt + (n-1)tdx = vdx$, dalle quali si ricaverà

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{t - nu} = \frac{dt}{v - (n-1)t}$, e quindi

$(A) \ldots \{v - (n-1)t\} du = (t - nu) dt$: ora facendo le suddette sostituzioni nell' equazione proposta che è tra x, y, p e q, ed andandosene la variabile x, resterà un' equazione tra u, t e v, dalla quale ritroveremo v dato per mezzo del t e dell' u,

il quale, sostituito nella (A), ci condurrà ad integrare un' equazione differenziale del primo ordine tra due variabili u, t. Fatta una tale integrazione, avremo t dato per mezzo dell' u; e quindi dall'equazione $\frac{dx}{x}=\frac{du}{t-nu}$, anche x dato per mezzo dell' u o per mezzo dell' y se in vece dell' u vi si ponga il suo valore $\frac{y}{x^n}$.

Per esempio: sia proposta l' equazione $x^2ddy = aydx^2 + bxdxdy$: poniamo q, p in vece di $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed avremo $x^2q = ay + bxp$. Se ora facciamo $y = x^n u$, $p = x^{n-1}t$, $q = x^{n-2}v$, troveremo $x^n v = ax^n u + bx^n t$, e dividendo per x^n, $v = au + bt$ L' equazione (A) si ridurrà allora alla seguente $\{au + (b-n+1)t\}du = (t-nu)dt$, che è un' equazione del primo ordine tra due variabili, e che si può integrare.

§ 266. Quando un' equazione differenziale del secondo ordine ridotta ad esser funzione di x, y, p e q, è tale che le quantità y, p, q compongono in ciascun termine lo stesso numero di dimensioni, essa può sempre ridursi all' integrazione di un' equazione del primo. Se in fatti faremo $p = uy$, $q = vy$, troveremo in ciascun termine dell' equazione la medesima potenza della y, e per mezzo della divisione togliendo questa variabile, si otterrà un' equazione tra x, v ed u, dalla quale si potrà determinre v per mezzo delle altre due x, u; ora si ha $dy = pdx$; dunque $dy = uydx$: poi a cagione di $dp = qdx$, sarà $dp = vydx = udy + ydu$, e per conseguenza

$\frac{dy}{y} = udx$, $\frac{dy}{y} = \frac{vdx - du}{u}$. Eguagliamo ora questi due valori di $\frac{dy}{y}$, e si troverà l'equazione del primo ordine $du + u^2dx = vdx$, la quale conterrà solo le due variabili u ed x, allorchè vi avremo sostituito in vece del v il suo valore ricavato dalla proposta. Integrata quest' ultima equazione, avremo il valore dell' u dato per mezzo della x, e quindi $ly = \int udx$.

Per esempio: sia da integrarsi l' equazione

$xyddy = ydxdy + xdy^2 + \frac{bxdy^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$: a questa dando la forma $xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, si vede che in ciascun termine le variabili y, p, q compongono due dimensioni, così essa può trattarsi colla regola sopra spiegata.

Facciasi dunque $p = uy$, $q = vy$, e si avrà, dividendo per y^2

$vx = u + xu^2 + \frac{bxu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, che ci darà

$du + u^2dx = \frac{udx}{x} + u^2dx + \frac{bu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}dx$, ovvero

$\frac{xdu - udx}{u^2} = \frac{bxdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, il cui integrale è

$C - \frac{x}{u} = -b\sqrt{(a^2 - x^2)}$, ovvero

$u = \frac{x}{C + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Sostituiamo questo valore di u, e si avrà $ly = \int \frac{xdx}{C + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

Per ottenere quest' ultimo integrale, poniamo $\sqrt{(a^2-x^2)}=t$, e sarà $xdx=-tdt$; quindi

$$ly=-\int\frac{tdt}{C+bt}=-\int\frac{dt}{b}+\int\frac{Cdt}{b(C+bt)},$$

$ly=-\frac{t}{b}+\frac{C}{b^2}l(C+bt)+lC'$, essendo C' un' altra costante arbitraria.

§ 267. Da ciò che abbiamo detto, ciascuno rileverà quanto poco si sappia per rispetto agl' integrali delle equazioni del secondo ordine, di modo che rare volte succede che un' equazione presa a caso riesca integrabile. Non ho parlato qui sopra delle equazioni del secondo ordine lineari a coefficienti costanti: per esse si hanno regole generali, come pure elle si hanno quando siffatte equazioni sono degli ordini superiori. Ne parlerò nel capo seguente. Per ciò poi che spetta all' integrazione col mezzo delle serie dirò qualche cosa: il teorema di TAYLOR adoperato per l'equazioni del primo ordine (§ 247) può usarsi anco per quelle del secondo; il metodo però riesce complicato. Si ha più utilità da quello dei coefficienti indeterminati, e perciò ne do un esempio.

Sia l' equazione $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)+ax^n y=0$; se noi poniamo $y=e^{\int pdx}z$, essendo p, z due funzioni della x da determinarsi, avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=e^{\int pdx}\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)+pz\right\},$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=e^{\int pdx}\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{dz}{dx}\right)+z\left(\frac{dp}{dx}\right)+p^2z\right\};$$

e l' equazione diventerà

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{dz}{dx}\right)+z\left(\frac{dp}{dx}\right)+p^2z+ax^nz=0.$$

Siccome tra due indeterminate noi abbiamo una sola equazione, perciò una di esse dipenderà dal nostro arbitrio; facciamo dunque $p^2 + ax^n = 0$, e sarà

$p = x^{\frac{n}{2}} \sqrt{-a}$, ovvero $p = x^m c$, avendo supposto $n = 2m$, $a = -c^2$.

L' integrale dunque dell' equazione

$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) - c^2 x^{2m} y = 0$ sarà

$y = e^{\int p dx} z = e^{\frac{c}{m+1} x^{m+1}} z$, essendo la variabile data da quest' equazione

$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2p \left(\frac{dz}{dx}\right) + z \left(\frac{dp}{dx}\right) = 0$, ovvero, mettendo in vece del p e del $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ i rispettivi valori, da quest' altra

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2cx^m \left(\frac{dz}{dx}\right) + mcx^{m-1} z = 0.$$

Fingiamo ora

$$z = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+m+1} + Cx^{\lambda+2m+2} + \text{ecc.},$$

e sostituendo avremo

$$\begin{aligned}
&\lambda(\lambda-1)Ax^{\lambda-2} \\
&\quad + (\lambda+m+1)(\lambda+m)Bx^{\lambda+m-1} + \text{ecc.} = 0 \\
&\quad + \qquad\qquad 2\lambda Ac \\
&\quad + \qquad\qquad mAc
\end{aligned}$$

donde concluderemo primieramente $\lambda = 0$, ovvero $\lambda = 1$.

Si avranno pertanto due serie atte ad esprimere il valore di z. Sarà pertanto

$$z = A + Bx^{m+1} + Cx^{2m+2} + Ex^{3m+3} + \text{ecc.}$$

$$A'x + B'x^{m+2} + C'x^{2m+3} + E'x^{3m+4} + \text{ecc.}$$

ed i valori dei coefficienti saranno.

$$B = -\frac{mAc}{m(m+1)}, \quad B' = -\frac{(m+2)A'c}{(m+2)(m+1)}$$

$$C = -\frac{(3m+2)Bc}{2(2m+1)(m+1)}, \quad C' = -\frac{(3m+4)B'c}{2(2m+3)(m+1)}$$

$$E = -\frac{(5m+4)Cc}{3(3m+2)(m+1)}, \quad E' = -\frac{(5m+6)C'c}{3(3m+4)(m+1)},$$

ecc. ecc. | ecc. ecc.

Restano indeterminati i due coefficienti A, A', e per ciò rappresenteranno le due costanti arbitrarie.

La prima di queste serie termina quando (rappresentando con i un numero intiero qualunque) $(2i+1)m + 2i = 0$, ovvero $m = -\frac{2i}{2i+1}$; e la seconda quando $(2i-1)m + 2i = 0$, ovvero $m = -\frac{2i}{2i-1}$: dunque in uno qualunque dei casi $m = -\frac{2i}{2i \pm 1}$, ovvero $2m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, si avrà almeno un integrale particolare della proposta espresso con un numero finito di termini.

E qui osservo che, trovato un integrale particolare, facilmente potrà aversene il completo in questa guisa: incontrandosi nell' integrale particolare la lettera c, mentre nell' equazione differenziale è c^2, si potrà in quell'integrale scrivere tanto $+c$, che $-c$, di modo che se l'integrale particolare è $y = P + cQ$,

possiamo anche prendere per esso $y = P - cQ$; ora l' equazione essendo lineare, prender potremo la somma di due integrali particolari onde esprimere l' integrale completo, ciascuno di essi moltiplicato con una costante arbitraria: avremo allora
$y = \alpha(P + Qc) + \beta(P - Qc)$, α, β indicando quelle costanti.

§ 268. L' equazione del secondo ordine
$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) - c^2 x^n y = 0$ si riduce al primo per mezzo di questa semplice sostituzione $y = e^{\int udx}$, e si trova $du + u^2 dx = c^2 x^n dx$, che è la celebre equazione del Riccati.

Dunque le integrazioni di queste due equazioni saranno dipendenti l' una dall' altra: ciò è dato dal calcolo; imperocchè anche l' equazione riccatiana è sempre integrabile, quando $n = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, prendendendo per i un numero intiero qualunque.

A fare un esempio, sia proposta l' equazione
$ddy - c^2 x^{-\frac{4}{3}} y dx^2 = 0$: si avrà in questo caso
$n = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{2}{3}$, $3m + 2 = 0$, e quindi
$y = e^{3c\sqrt[3]{x}} z$, $z = A + B\sqrt[3]{x}$, $B = -3Ac$, ed in conseguenza

$$y = A\left\{e^{3c\sqrt[3]{x}} - 3ce^{3c\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{x}\right\}$$

$$+ A'\left\{e^{-3c\sqrt[3]{x}} + 3ce^{-3c\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{x}\right\}$$ sarà l'integrale completo, indicando per A, A' due costanti arbitrarie.

§ 269. Soggiungo relativamente all' equazioni differenziali del secondo ordine, che considerate rispetto alla geometria esse ci rappresentano una proprietà del raggio di curvatura. In fatti contenendosi nella formola esprimente questo raggio la quantità $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, potrà essa eliminarsi per mezzo di un' equazione proposta, e trovarsi il raggio R dato per mezzo della x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$: avremo in questa maniera il rapporto tra il raggio di curvatura, l' ascissa, l' ordinata e la tangente del punto cui quello conviene: anzi generalmente parlando, una data equazione differenziale del secondo ordiue ci somministrerà la relazione che una quantità appartenente ad una proprietà del contatto del secondo ordine, o una proprietà qualunque geometrica o meccanica espressa per mezzo dei differenziali secondi, ha con l' ascissa, l' ordinata e la tangente corrispondente allo stesso punto.

Verrà occasione in avvenire di tornare sopra queste considerazioni.

CAPO XIII.

Integrazione dell' equazioni differenziali degli ordini superiori.

§ 270. Un' equazione $P=0$ tra x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ .... $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)$ è un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo}; si chiama integrale *primo* completo di essa un' altra equazione $Q=0$, il cui più alto

differenziale è $\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, contiene una costante arbitraria, ed è tale che eliminando questa costante con le due equazioni $Q=0$, $dQ=0$, viene per risultamento o la stessa $P=0$, o un' equazione che ad essa riducasi.

Integrale *secondo* completo è un' equazione $Q=0$, il cui più alto differenziale è $\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$, contiene due costanti arbitrarie, ed è tale che eliminando queste due costanti per mezzo delle tre equazioni $Q=0$, $dQ=0$, $d^2Q=0$, si ottiene per risultamento o la stessa $P=0$, o un' equazione che ad essa si riduce, ecc.

Integrale finito completo poi dicesi un' equazione $Q=0$ tra x, y senza differenziali, la quale contiene un numero n di costanti arbitrarie, e tale che eliminando esse per mezzo delle equazioni $Q=0$, $dQ=0$, $d^2Q=0$, ... $d^nQ=0$, si ottiene o l' equazione $P=0$, o un' equazione che ad essa si riduce.

Siccome poi noi abbiamo mostrato (§ 22) che un' equazione differenziale del secondo ordine può nascere da due differenti equazioni differenziali del primo, delle quali ciascuna contenga una costante arbitraria diversa, se con una di queste equazioni differenziali del primo ordine e del di lei differenziale si elimini la costante ch' essa contiene, perciò si suol dire che un' equazione differenziale del secondo ordine ha due integrali primi diversi; e per una ragione compagna, che un' equazione differenziale del terzo ha tre integrali primi del secondo ordine, ciascuno dei quali contiene una costante arbitraria diversa, e così via discorrendo.

§ 271. Sia $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = \Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) \right\}$, la formola generale di un' equazione dell'ordine ennesimo: essa è integrabile completamente in questi tre casi:

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = \Psi(x), \quad \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = \Psi\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right),$$

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = \Psi\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right).$$

Nel primo caso il di lei integrale è $y = \int^n \Psi(x)\, dx^n$. Le costanti arbitrarie sono introdotte dalle n integrazioni indicate da $\int^n$.

Nel secondo, facciamo $p = \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$, ed avremo $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx = dp = \Psi(p)\, dx$; dunque $\frac{1}{\Psi(p)} dp = dx$, e quindi $\int \frac{1}{\Psi(p)} dp = x + C$.

Eseguita l' integrazione, trovar potremo il valore del p, che sarà una funzione di $x + C$; sia questo valore $p = \varphi(x + C)$, ed avremo da integrare $\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \varphi(x + C)$; questa equazione è nelle circostanze del primo caso.

Nel terzo caso facciamo $\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) = p$; ed avremo

$\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) = \Psi(p)$: moltiplichiamo quest' equazione per

$\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$, e sarà

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) dx = \Psi(p) \cdot dp\text{, e quindi}$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2\int \Psi(p) \cdot dp + C$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \sqrt{\{C + 2\int \Psi(p) \cdot dp\}}.$$

Eseguita l'integrazione, il secondo membro sarà una funzione $\phi(p)$ del p, e per conseguenza avremo allora da integrare l'equazione

$$\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \phi\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)\text{, la quale è nelle circostanze}$$

del secondo caso qui sopra considerato.

Sia, per esempio, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = a$, e facendo

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = p$, si ha

$$p\left(\frac{dp}{dx}\right) dx = pdp = adx\text{, e quindi}$$

$p^2 = 2\int adx + C = 2ax + C$. Sarà dunque

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \sqrt{(C + 2ax)}\text{, ed integrando}$$

$$y = \int dx \int dx\,(C + 2ax)^{\frac{1}{2}} = \int^2 (C + 2ax)^{\frac{1}{2}}\, dx^2.$$

§ 272. Veniamo all' integrazione dell' equazioni lineari. Parleremo di quelle del terzo ordine, giacchè il metodo è intieramente lo stesso per l' equazioni degli ordini superiori al terzo.

Sia dunque da integrarsi l' equazione

$$(A) \ldots ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + g\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = X,$$

i coefficienti ed il secondo membro della quale siano funzioni della variabile x.

Poniamo $y = \alpha \int z dx$, rappresentando con α e z due funzioni incognite della x. In conseguenza di questa supposizione avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\int z dx + \alpha z,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)\int z dx + 2\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)z + \alpha\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \left(\frac{d^3\alpha}{dx^3}\right)\int z dx + 3\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)z$$

$$+ 3\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \alpha\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

Fatte le sostituzioni nell' equazione (A), avremo

$$\left\{a\alpha + b\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) + g\left(\frac{d^3\alpha}{dx^3}\right)\right\}\int z dx$$

$$+ \left\{b\alpha + 2c\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + 3g\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)\right\}z$$

$$+ \left\{c\alpha + 3g\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\right\}\left(\frac{dz}{dx}\right) + g\alpha\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = X.$$

Se ora si fa

$$(1) \ldots a\alpha + b\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) + g\left(\frac{d^3\alpha}{dx^3}\right) = 0,$$

dall' integrazione di questa equazione ci sarà dato α, e la z ci sarà data dall' integrazione di un' altra di questa forma

$$(B) \ldots b'z + c'\left(\frac{dz}{dx}\right) + g'\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = X:$$

l' equazione (1) è la stessa (A) nel caso di $X = 0$, e l' equazione (B) è un' equazione lineare del secondo ordine.

Facciamo $z = \alpha' \int z'dx$, essendo α', z' due funzioni incognite della x, e regolandoci per l' equazione (B) come si fece per l' (A), si avrà α' data da quest' equazione

$$(2) \ldots b'\alpha' + c'\left(\frac{d\alpha'}{dx}\right) + g'\left(\frac{d^2\alpha'}{dx^2}\right) = 0,$$

e la z' da un' altra di questa forma

$$(C) \ldots c''z' + g''\left(\frac{dz'}{dx}\right) = X;$$

in fine posto $z' = \alpha'' \int z''dx$, si avrà α'' data dalla equazione

$$(3) \ldots c''\alpha'' + g''\left(\frac{d\alpha''}{dx}\right) = 0,$$ e la z'' da un' altra di questa forma

$$(E) \ldots g'''z'' = X.$$

Sarà pertanto (a) $y = \alpha \int \alpha'dx \int \alpha''dx \int \frac{X}{g'''}dx$, ed i tre segni d' integrazione introdurranno tre costanti arbitrarie. Essendo poi $g' = g\alpha$; $g'' = g'\alpha'$; $g''' = g''\alpha''$, sarà $g'' = g\alpha\alpha'$; $g''' = g\alpha\alpha'\alpha''$.

§ 273. L' integrazione adunque dell' equazione (A) del terzo ordine dipende dall' integrazione di quelle tre equazioni (1), (2), (3), le quali dar debbono i valori delle funzioni α, α', α''. Ora io dimostrerò

che trovati tre integrali particolari dell' equazione (1), si hanno subito quei delle altre due equazioni, e che perciò tutto il nodo della quistione sta nell' integrare l' equazione (1) che è la stessa (A), quando $X = 0$.

Si moltiplichi per $\int a'dx$ l' equazione (1) e ad essa si aggiunga la (2), dopo avere posti in vece dei coefficienti b', c', g', i loro valori: noi avremo l' equazione

$$\left\{ a\alpha + b\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) + g\left(\frac{d^3\alpha}{dx^3}\right)\right\} \int \alpha' dx$$

$$+ \left\{ b\alpha + 2c\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + 3g\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)\right\} \alpha'$$

$$+ \left\{ c\alpha + 3g\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\right\} \left(\frac{d\alpha'}{dx}\right) + g\alpha\left(\frac{d^2\alpha'}{dx^2}\right) = 0,$$

la quale si riduce a

$$(2)' \ldots a\alpha\int\alpha'dx + b\left(\frac{d\cdot\alpha\int\alpha'dx}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2\cdot\alpha\int\alpha'dx}{dx^2}\right)$$

$$+ g\left(\frac{d^3\cdot\alpha\int\alpha'dx}{dx}\right) = 0.$$

Ma quest' equazione (2)' avendo i medesimi coefficienti della (1), dovrà $\alpha\int\alpha'dx$ essere un integrale particolare della medesima, il quale se noi indichiamo con $\alpha 1$, avremo $\alpha 1 = \alpha\int\alpha'dx$, e quindi

$\alpha' = \left(\frac{d(\alpha 1 : \alpha)}{dx}\right)$: *Un integrale*, cioè, *particolare* α' *dell' equazione* (2) *è eguale al differenziale del quoziente di due integrali particolari della* (1).

Se dunque indichiamo con α, $\alpha 1$, $\alpha 2$ i tre integrali particolari della (1), e con α', $\alpha' 1$ i due della (2), avremo

$$\alpha' = \left(\frac{d(\alpha 1 : \alpha)}{dx}\right), \quad \alpha' 1 = \left(\frac{d(\alpha 2 : \alpha)}{dx}\right);$$

e siccome l' equazione (3) è rispetto alla (2) ciò che è questa qui rispetto all' (1), perciò dagl' integrali particolari della (2) prendendo il differenziale del quoziente $\frac{a'1}{a'}$, si troverà l' integrale a'' dell' equazione (3), il quale sarà $a'' = \frac{1}{dx} d(a'1 : a')$.

§ 274. Dunque si potrà sempre avere l' integrale completo di un' equazione lineare del terzo ordine con i coefficienti e col secondo membro, funzioni della x, se potremo in qualche modo conoscere tre integrali particolari della medesima nel caso che il secondo membro sia nullo; anzi basterà la cognizione di due soltanto, poichè non conoscendosi un integrale particolare dell' equazione (1), ne resterà per conseguenza sconosciuto uno nell' equazione (2); pel che non sapremo col mezzo degl' integrali della (2) quale è l' integrale dell' equazione (3). Questa però essendo del primo ordine, può sempre integrarsi (§ 228), e per conseguenza suppliremo in questa guisa alla mancanza di quell' integrale della (1).

Battendo la medesima strada, si giungerebbe ad un simile teorema per l' equazioni lineari di un ordine qualunque.

§ 275. Se i coefficienti dell' equazione (A) del (§ 272) saranno costanti, l' integrale di essa dipenderà allora da una equazione algebratica del terzo grado, di un grado, cioè, eguale all' ordine della equazione differenziale.

Di fatto in tal caso all' equazione (1) soddisfanno questi tre valori dell' a,

$a = Ce^{nx}$, $a = C'e^{n'x}$, $a = C''e^{n''x}$, indicando con C, C', C'' tre costanti arbitrarie, e con n, n', n'' le tre radici dell' equazione algebratica $a + bn + cn^2 + gn^3 = 0$, il che può facilmente ciascuno verificare: dunque saranno quei tre valori i tre integrali particolari dell' equazione (1), ed avremo

$a = Ce^{nx}$; $a1 = C'e^{n'x}$; $a2 = C''e^{n''x}$;

$$a' = \frac{C'}{Cdx}\, de^{(n'-n)x} = \frac{C'(n'-n)}{C}\, e^{(n'-n)x};$$

$$a'1 = \frac{C''}{Cdx}\, de^{(n''-n)x} = \frac{C''(n''-n)}{C}\, e^{(n''-n)x};$$

$$a'' = \frac{C''(n''-n)}{C'(n'-n)dx}\, de^{(n''-n')x} =$$

$$\frac{C''(n''-n)(n''-n')}{C'(n'-n)}\, e^{(n''-n')x};$$

ora le tre costanti essendo arbitrarie, possiamo supporle tali che i coefficienti de' valori di a, a', a'' siano l' unità.

Fatte dunque le opportune sostituzioni e riduzioni nella formola ritrovata per y, avremo

$$(b) \ldots y = \frac{1}{g}\, e^{nx} \int e^{(n'-n)x}\, dx \int e^{(n''-n')x}\, dx \int \frac{Xdx}{e^{n''x}}.$$

Questo integrale è completo, perchè contenendo tre segni sommatori, portano essi tre costanti arbitrarie.

§ 276. Si può dare un' altra forma alla nostra formola dell' integrale. Facciamo $g = 1$, il che si può senza che l' equazione (A) cessi di essere egualmente generale.

Integriamo a parti la formola (b), e si avrà

$$y = \frac{e^{n'x} \int e^{(n''-n')x}\, dx \int X e^{-n''x}\, dx}{n'-n}$$

$$- \frac{e^{nx} \int e^{(n''-n)x}\, dx \int X e^{-n''x}\, dx}{n'-n}$$

$$= \frac{e^{n''x} \int e^{-n''x}\, Xdx}{(n'-n)(n''-n')} - \frac{e^{n'x} \int e^{-n'x}\, Xdx}{(n'-n)(n''-n')}$$

$$-\frac{e^{n''x}\int e^{-n''x}Xdx}{(n'-n)(n''-n)}+\frac{e^{nx}\int e^{-nx}Xdx}{(n'-n)\ (n''-n)},\ \text{ovvero}$$

$$(c)\ldots\ y=\frac{e^{n''x}\int e^{-n''x}Xdx}{(n''-n')(n''-n)}+\frac{e^{n'x}\int e^{-n'x}Xdx}{(n'-n)\ (n'-n'')}$$

$$+\frac{e^{nx}\int e^{-nx}Xdx}{(n-n')\ (n-n'')};$$ anche questa formola rappresenta l' integrale completo perchè ai tre segni sommatori aggiunger conviene tre costanti arbitrarie.

§ 277. Se il secondo membro dell' equazione (A) sarà nullo, allora la formola (b) si cangia in quest' altra

$(b)'$ $y=e^{nx}\int e^{(n'-n)x}dx\int e^{(n''-n')x}dx+C$, poichè $\int o dx$ è eguale ad una costante arbitraria C; e la formola (c) cangiasi in

$(c)'\ldots y=Ce^{nx}+C'e^{n'x}+C''e^{n''x}$, ove C, C', C' rappresentano tre costanti arbitrarie, entro alle quali consideriamo contenuti i denominatori costanti che avevano i termini della formola medesima. A questa formola (c) saremmo giunti anco sommando i tre integrali particolari (§ 275) dell' equazione (1), la quale è la stessa equazione del terzo ordine della quale qui si parla.

§ 278. Per l' equazioni lineari con i coefficienti costanti degli ordini superiori si hanno consimili formole, cui si giunge per la medesima via. Io non riferisco altro che quelle pel caso del secondo membro nullo.

Se l' equazione da integrarsi è

$$a+b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\ldots+p\left(\frac{d^my}{dx^m}\right)=0,$$

l' integrale completo è dato da una di queste due formole

$$(b)' \ldots y = \frac{1}{p} e^{nx} \int e^{(n'-n)x} dx \ldots\ldots \times$$

$$\int e^{\{n^{(m-1)} - n^{(m-2)}\}x} \cdot \int odx \text{ , ove } \int odx$$

rappresenta una costante arbitraria;

$$(c)' \ldots y = Ce^{nx} + C'e^{n'x} + C''e^{n''x} \ldots$$

$$+ C^{(m-1)} e^{n^{(m-1)} x} \text{, ove } C,\ C'\text{, ecc. sono le}$$

costanti arbitrarie di numero m.

Le lettere n, n', ... $n^{(m-1)}$ rappresentano le m radici dell' equazione algebratica

$(e) \ldots\ldots a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots + p\alpha^m = 0$, cioè gli m valori della α.

La prima formola $(b)'$ ci dà sempre gl' integrali completi, ma la seconda in qualche caso non ha questo pregio: vediamo allora come dovremmo regolarci.

§ 279. Quando l' equazione algebratica (e) ha alcune radici eguali, la formola $(c)'$, che è l' aggregato di un numero m d' integrali particolari diversi, non dà più l' integrale completo; di fatto se tre sono, per esempio, le radici eguali $n = n' = n''$, il valore della y diventa

$y = (C + C' + C'') e^{nx} + C'''e^{n'''x} + \text{ecc.}$, nel quale la somma $C + C' + C''$ equivale ad una sola costante arbitraria: mancano dunque due costanti all' integrale. D' Alembert immaginò un metodo per rettificare in questi casi la formola, onde sempre ci desse integrali completi: a questo metodo perchè era difettoso io sostituii il seguente.

Essendo n, n', ... $n^{(m-1)}$ le radici dell'equazione

(e) .... $a + ba + ca^2 + \ldots\ldots + pa^m = 0$, è noto che le radici dell' equazione

$(e)'$ .... $b + 2ca + 3ea^2 + \ldots\ldots + mpa^{m-1} = 0$

(la quale nasce dal moltiplicare ciascun termine dell' equazione (e) per l' esponente che vi ha l' a, e dividere quindi per a) avranno per limiti le quantità n, n', ... $n^{(m-1)}$: dunque se l' equazione (e) ha due radici eguali n, n', l' equazione $(e)'$ avrà una radice eguale a n; e perciò questa radice soddisfarà nel medesimo tempo all' equazioni (e), $(e)'$: se ora l' equazione (e) si moltiplica per x e vi si aggiunge l' equazione $(e)'$, avremo questa equazione $(e)\,x + (e)' = 0$, cioè

(f) ..... $ax + b\,(ax + 1) + c\,(a^2x + 2a) + e\,(a^3x + 3a^2) + \ldots\ldots + p\left(a^m x + ma^{m-1}\right) = 0$; ed uno dei due valori della a eguali n, n' soddisfarà nel medesimo tempo le due equazioni (e), (f).

Ora è evidente che qualunque valore della y, funzione di una delle radici eguali n e della x, il quale sostituito nella proposta la trasformi nell' equazione (f), sarà un nuovo integrale particolare della proposta medesima. Se dunque si fa $y = C'xe^{nx}$, essendo C' una costante arbitraria, si ha

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = C'e^{nx}\,(nx + 1)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = C'e^{nx}\,(n^2x + 2n) \text{ ecc.},$$

e sostituendo questi valori nell' equazione

$ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + \ldots\ldots + p\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$, abbiamo precisamente l'equazione (f); dunque sarà $y = C'x \cdot e^{nx}$ un altro integrale particolare della proposta; dunque nel caso che n sia una delle radici eguali della equazione (e), soddisfà all' equazione differenziale non solo $y = Ce^{nx}$, ma ancora $y = C'xe^{nx}$; e perciò in vece dei due termini $Ce^{nx} + C'e^{n'x}$ (i quali si riducono ad un solo) si metteranno i due $Ce^{nx} + C'xe^{nx}$, e così l' integrale essendo sempre un aggregato di m integrali particolari diversi, sarà completo.

§ 280. Quando le radici eguali fossero tre $n = n' = n''$, una di tali radici soddisfarebbe nel medesimo tempo alle due equazioni (e), $(e)'$ del § antecedente, ed all' equazione

$$(e)'' \ldots 2c + 2 \cdot 3ea + 3 \cdot 4fa^2 + \ldots + m(m-1) \times pa^{m-2} = 0,$$

le cui radici hanno per limiti quelle dell' equazione $(e)'$; quest' equazione $(e)''$ si ricava dall' equazione $(e)'$, come si è ricavata la stessa $(e)'$ da (e): se adesso si moltiplica l' equazione (e) per x^2, l' equazione $(e)'$ per $2x$, e s' aggiungono alla $(e)''$, avremo l' equazione

$$(f)' \ldots ax^2 + b(ax^2 + 2x) + c(a^2x^2 + 2a \cdot 2x + 2) + e(a^3x^2 + 3a \cdot 2x + 2 \cdot 3a) + \ldots\ldots + p\{a^m x^2 + ma^{m-1} \cdot 2x + m(m-1)a^{m-2}\} = 0;$$

ed una delle radici eguali o sia dei valori eguali dell' a soddisfarà nel medesimo tempo alle tre equazioni (e), (f), $(f)'$.

Prendiamo ora per y una tal funzione della x e della n che sostituita nella proposta, la trasformi

nell' equazione $(f)'$; questa funzione sarà un altro integrale particolare della proposta.

Ma $y = C''e^{nx} \cdot x^2$ ha siffatta proprietà; dunque $y = C''e^{nx} \cdot x^2$ sarà un nuovo integrale particolare della proposta; dunque nel caso di tre radici eguali a n questa radice darà i tre integrali particolari diversi

$$y = Ce^{nx},\ y = C'e^{nx} \cdot x,\ y = C''e^{nx} \cdot x^2;$$

onde in vece dei tre termini dell' integrale completo

$$Ce^{nx} + C'e^{n'x} + C''e^{n''x},$$

i quali in questo caso si riducono ad uno solo, si porranno i tre seguenti

$$Ce^{nx} + C'e^{nx} \cdot x + C''e^{nx} \cdot x^2;$$

e così l' integrale si manterrà completo.

Se il numero delle radici eguali fosse maggiore, facil cosa è il comprendere come converrà regolarsi per mantenere completo l' integrale.

§ 281. Proponiamoci l' equazione

$$a'y + b'(p+qx)\left(\frac{dy}{dx}\right) + c'(p+qx)^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
$$+ g'(p+qx)^3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = X,$$ nella quale a', b', c', g', p, q sono costanti.

Paragonata questa coll' equazione (a) del (§ 272), si ha

$$y = a \int a'dx \int a''dx \int \frac{Xdx}{g'(p+qx)^3 aa'a''}:$$

per trovare a, a', a'' conviene cercare i tre integrali particolari di quest' equazione

$$a'\alpha + b'(p+qx)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + c'(p+qx)^2\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)$$
$$+ g'(p+qx)^3\left(\frac{d^3\alpha}{dx^3}\right) = 0.$$ A tal fine facciamo $\alpha = C(p+qx)^m$, e fatte le opportune sostituzioni, avremo per determinare m l' equazione

$$a' + b'qm + c'q^2m(m-1) + g'q^3m(m-1)(m-2) = 0.$$

Questa equazione avrà tre radici; avremo dunque tre valori dell' m. Siano essi m, m', m'', ed i tre integrali particolari saranno

$\alpha = C(p+qx)^m$; $\alpha 1 = C'(p+qx)^{m'}$;

$\alpha 2 = C''(p+qx)^{m''}$. Da questo si ricaverà (§ 275)

$$\alpha' = \frac{C'}{C} \cdot \frac{d(p+qx)^{m'-m}}{dx};$$

$$\alpha' 1 = \frac{C''}{C} \cdot \frac{d(p+qx)^{m''-m}}{dx};$$

$$\alpha' = \frac{C'(m'-m)q}{C}(p+qx)^{m'-m-1};$$

$$\alpha' 1 = \frac{C''(m''-m)q}{C}(p+qx)^{m''-m-1};$$

e da questi

$$\alpha'' = \frac{C''(m''-m)}{C'(m'-m)} \cdot \frac{d(p+qx)^{m''-m'}}{dx},$$

$$\alpha'' = \frac{C''(m''-m)(m''-m')q}{C'(m'-m)}(p+qx)^{m''-m'-1}.$$

Se ora quelle tre costanti arbitrarie si prendono tali che i coefficienti costanti che trovansi nei valori di α, α', α'', divengano eguali all' unità, avremo

$$y = (p + qx)^m \int (p + qx)^{m' - m - 1} dx \times$$
$$\int (p + qx)^{m'' - m' - 1} dx \int \frac{X dx}{g' (p + qx)^{m'' + 1}};$$

siffatto integrale sarà sempre completo.

Quando poi il secondo membro della proposta equazione fosse nullo, allora si avrebbe

$$y = (p + qx)^m \int (p + qx)^{m' - m - 1} dx \times$$
$$\int (p + qx)^{m'' - m' - 1} dx \int o dx, \text{ ovvero}$$
$$y = C (p + qx)^m + C' (p + qx)^{m'} + C'' (p + qx)^{m''}.$$

Quest' ultima formola per altro dà gl' integrali incompleti, quando i valori delle radici m, m', m'' non sono disuguali tra loro.

§ 282. Diciamo ora qualche cosa dell' equazioni lineari a più variabili.

Si abbiano le due equazioni

$$(1) \ldots \quad \left.\begin{array}{l} ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \\ + a'\theta + b'\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + c'\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) \end{array}\right\} = X$$

$$(2) \ldots \quad \left.\begin{array}{l} Ay + B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \\ + A'\theta + B'\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + C'\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) \end{array}\right\} = X',$$

nelle quali i coefficienti e i secondi membri siano funzioni della x. Se il valore di $\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)$ ricavato dalla

seconda equazione si sostituisce nella prima, avremo un' equazione di questa forma

$$(3) \dots \left.\begin{array}{l} a1 \cdot y + b1 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + c1 \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \\ + a'1 \cdot \theta + b'1 \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right) \end{array}\right\} = X1.$$

Si differenzj l'equazione (3), e si avrà un' equazione della forma

$$(4) \dots \begin{array}{l} a2 \cdot y + b2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + c2 \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e2 \cdot \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \\ + a'2 \cdot \theta + b'2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right) + c'2 \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) = X2. \end{array}$$

In questa equazione (4) sostituendo il valore di $\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)$ ricavato dall' equazione (2), avremo l' equazione della forma

$$(5) \dots \begin{array}{l} a3 \cdot y + b3 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + c3 \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e3 \cdot \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \\ + a'3 \cdot \theta + b'3 \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = X3. \end{array}$$

L' equazione (5) differenziata, e sostituito in essa il valore di $\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)$ dato dall' equazione (2), divenga di questa forma

$$(6) \dots \begin{array}{l} a4 \cdot y + b4 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + c4 \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e4 \cdot \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \\ + f4 \cdot \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) + a'4 \cdot \theta + b'4 \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = X4. \end{array}$$

Per mezzo adesso dell' equazioni (3), (5), (6) si possono eliminare le quantità θ e $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, e s' avrà allora un' equazione lineare del quarto ordine fra le due sole variabili x e y. Si ricaverà da una tale equazione il valore della y, il quale sostituito in due delle stesse equazioni (3); (5), (6), ed eliminato per mezzo di esse $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, s' avrà il valore della θ senza bisogno di alcuna integrazione.

§ 283. Quando i coefficienti sono costanti, l' equazione risultante ha ancora essa i coefficienti costanti; anzi in questo caso se anche X, X' sono nulli, si può far subito $y = Ae^{\alpha x}$; $\theta = Ae^{\alpha x}\cdot\delta$, α e δ essendo costanti da determinarsi, ed A una costante la quale, come vedremo, resta arbitraria. Sostituendo questi valori nell' equazioni (1), (2), si avranno per determinare α e δ le due equazioni

$$\left.\begin{array}{l} a + b\alpha + c\alpha^2 \\ + (a' + b'\alpha + c'\alpha^2)\,\delta \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ + (A' + B'\alpha + C'\alpha^2)\,\delta \end{array}\right\} = 0$$

dalle quali eliminando δ, si ha un' equazione algebratica del quarto grado

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)(A' + B'\alpha + C'\alpha^2) = (A + B\alpha + C\alpha^2)(a' + b'\alpha + c'\alpha^2)$$

; da questa si ricaverà il valore dell' α.

Questa equazione avrà quattro radici, e perciò quattro valori dell' α, che possiamo indicare con α, α', α'', α'''; essi ci daranno quattro valori del δ, che indichiamo con δ, δ', δ'', δ'''.

Avremo allora quest' espressione per la y

$$y = Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x} + A'''e^{\alpha''' x},$$

e per θ quest' altra

$$\theta = Ae^{\alpha x}.\delta + A'e^{\alpha' x}.\delta' + A''e^{\alpha'' x}.\delta'' + A'''e^{\alpha''' x}.\delta'''.$$

Le lettere A, A', A'', A''' rappresentano quattro costanti arbitrarie.

Si vede come potremmo fare se il numero delle equazioni fosse maggiore.

§ 284. Osserviamo che se il numero dell' equazioni date sarà inferiore al numero delle variabili y, θ, ecc. funzioni della x, allora non potranno trovarsi i valori di esse, e resteranno tante di quelle variabili al nostro arbitrio, quante sono l' equazioni di meno. Potremo, se ci piace, dare dei valori particolari ad alcune di quelle variabili, o completare il numero dell' equazioni con delle altre equazioni arbitrarie qualunque, sicchè siano tante equazioni quante variabili da determinarsi; così se si avesse l' equazione del primo ordine $M + N\left(\frac{dy}{dx}\right) + L\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = 0$, potrebbesi prendere qualunque valore per y o per θ, o in generale stabilire un' altra equazione qualunque tra x, y, θ, onde poterne ottenere i valori di y e di θ.

CAPO XIV.

Integrazione dell' equazioni differenziali con molte variabili.

§ 285. Al (§ 33) abbiamo detto che un' equazione differenziale

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdo + \text{ecc.} = 0$$

non può risguardarsi come il differenziale esatto di

un' equazione $V = 0$ tra le dette variabili x, y, z, ω, ecc., se non sono soddisfatte queste equazioni

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right),\ \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right),\ \text{ecc.}$$

$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$, ecc.; dunque data una siffatta equazione, esaminando se queste sono verificate, verremo in cognizione se essa è un differenziale esatto, e quindi se è integrabile; se, cioè, vi è un' equazione $V = 0$, da cui sia nata mercè della differenziazione. Questa equazione poi $V = 0$ chiamasi l' integrale. Abbia l' equazione tre sole variabili, e sia
$Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

Se quelle tre equazioni, le quali si chiamano i tre criterj d' integrabilità, non sono soddisfatte, essa non è un differenziale esatto; pure talvolta può diventarlo moltiplicato per un idoneo fattore. In fatti sia M questo fattore, e s' avrà
$MPdx + MQdy + MRdz = 0$.

Dovranno dunque essere soddisfatte le tre equazioni

$$\left(\frac{d\cdot MP}{dy}\right) = \left(\frac{d\cdot MQ}{dx}\right),\ \left(\frac{d\cdot MP}{dz}\right) = \left(\frac{d\cdot MR}{dx}\right),$$

$\left(\frac{d\cdot MQ}{dz}\right) = \left(\frac{d\cdot MR}{dy}\right)$, le quali, fatte le differenziazioni, diverranno

$$(H)\ldots\left\{\begin{array}{l} P\left(\frac{dM}{dy}\right) + M\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dM}{dx}\right) + M\left(\frac{dQ}{dx}\right), \\ P\left(\frac{dM}{dz}\right) + M\left(\frac{dP}{dz}\right) = R\left(\frac{dM}{dx}\right) + M\left(\frac{dR}{dx}\right), \\ Q\left(\frac{dM}{dz}\right) + M\left(\frac{dQ}{dz}\right) = R\left(\frac{dM}{dy}\right) + M\left(\frac{dR}{dy}\right). \end{array}\right.$$

Moltiplicando ora la prima di queste equazioni per R, la seconda per $-Q$, la terza per P, ed aggiungendole tutte insieme, avremo

$$(E) \ldots R\left(\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

$$+ P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0;$$ e questa sarà l'equazione di condizione fra P, Q, R, la quale debbe sussistere, acciò la proposta sia capace di divenire integrabile in virtù di un fattore M.

L'equazione (E) è stata data da GIOVANNI BERNOULLI.

Facendo ora $R = 0$, e supponendo che P e Q non contengano z, l'equazione (E) sarà soddisfatta da sè medesima; dal che concluderemo che *Un' equazione differenziale tra due variabili* $Pdx + Qdy = 0$ *può divenire sempre integrabile, moltiplicandola con un idoneo fattore.*

§ 286. Assicurati che un' equazione può divenire integrabile, vediamo come effettivamente possa farsene l'integrazione. Sia proposta l'equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, che divenga integrabile mercè la moltiplicazione del fattore M; sarà allora $MPdx + MQdy + MRdz = 0$ una differenziale totale esatta di un' equazione $V = 0$, che dee ritrovarsi.

Per questo osservo che se nell' equazione $V = 0$ si avesse per costante la y, allora $MPdx + MRdz = 0$ sarebbe la differenziale esatta della $V = 0$ in questa ipotesi; dunque ad avere $V = 0$, prenderemo l'integrale dell' equazione $MPdx + MRdz = 0$, e la costante che vi aggiungeremo la faremo funzione della y: differenzieremo poi questa equazione ottenuta facendo tutto variare, e fatto il confronto con la proposta, determineremo così la funzione aggiunta. Il

fattore M sarà quello che rende integrabile $Pdy + Rdz = 0$. Potremmo in questa operazione incominciare dal prendere per costante la x, ovvero anche la z. Il processo per giungere all' integrale è lo stesso. Si prenderà quella che più torna a conto.

Se poi questa stessa regola si applicasse ad una equazione non integrabile, la faccenda non riuscirebbe, e saremmo avvertiti dell' impossibilità della integrazione dal trovare la funzione formata anco delle altre variabili, il che è contro l' ipotesi, giacchè essa debb' essere funzione della y soltanto.

Per intendere anche meglio questa operazione, esperimentiamo l' equazione non integrabile

$zdx + xdy + ydz = 0$.

Prendiamo z per costante, ed avremo da integrare

$$zdx + xdy = 0\text{, ovvero } \frac{zdx}{x} + dy = 0,$$

il cui integrale è $zlx + y = C$, essendo C una funzione della medesima z. Prendiamo ora la differenziale totale di quest' equazione, ed avremo

$$\frac{zdx}{x} + dy + lxdz = \left(\frac{dC}{dz}\right) dz\text{, ovvero}$$

$$zdx + xdy + dz \left\{ xlx - x\left(\frac{dC}{dz}\right) \right\} = 0:$$

dovrebbe dunque essere

$$xlx - x\left(\frac{dC}{dz}\right) = y\text{, ovvero}$$

$$\left(\frac{dC}{dz}\right) = lx - \frac{y}{x}\text{; il che è assurdo.}$$

Proposta poi l' equazione integrabile

$2dx\,(y + z) + dy\,(x + 3y + 2z) + dz\,(x + y) = 0$,

supponendovi y costante, ci viene da integrare

$2dx\,(y + z) + dz\,(x + y) = 0$, che diventa differenziale esatta moltiplicandola per $\frac{1}{(y+z)(x+y)}$, e si ha

$\frac{2dx}{x+y} + \frac{dz}{y+z} = 0$, il cui integrale è

$2l(x+y) + l(y+z) = C$, essendo C funzione della y.

Inoltre la differenziale totale di questo integrale è

$\frac{2dx+2dy}{x+y} + \frac{dy+dz}{y+z} = \left(\frac{dC}{dy}\right) dy$, ovvero

$2dx(y+z) + 2dy(y+z) + dy(x+y) + dz(x+y)$

$= \left(\frac{dC}{dy}\right) dy \cdot (x+y)(y+z)$, che paragonata con la proposta ci dà

$\left(\frac{dC}{dy}\right) dy = dC = 0$, e quindi $C = A$, essendo A una vera costante.

Sarà dunque l' integrale complete

$(x+y)^2 (y+z) = A$.

§ 287. Facciasi un altro esempio. Paragonando l' equazione differenziale

$dx(yy+yz+zz) + dy(zz+xz+xx) +$
$dz(xx+xy+yy) = 0$ con la formola

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$, si ha

$P = yy + yz + zz$, $Q = zz + xz + xx$,

$R = xx + xy + yy$, $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y + z$,

$\left(\frac{dP}{dz}\right) = y + 2z$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = z + 2x$,

$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 2z + x$, $\left(\frac{dR}{dx}\right) = 2x + y$,

$\left(\frac{dR}{dy}\right) = 2y + x$, e perciò il criterio

$$R\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)\right\}+P\left\{\left(\frac{dQ}{dz}\right)-\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\}$$
$$+Q\left\{\left(\frac{dR}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dz}\right)\right\}=0 \text{ diventa}$$

$2(yy+xy+xx)(y-x)+2(yy+yz+zz)(z-y)$
$+2(zz+xz+xx)(x-z)=0$, che, fatte le moltiplicazioni, trovasi formare un' equazione identica; dunque la proposta è integrabile.

Per trovarne l'integrale, suppongasi z costante, e sarà $\dfrac{dx}{xx+xz+zz}+\dfrac{dy}{yy+yz+zz}=0$, il cui integrale è (§ 181)

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\text{ ang tang }\frac{x\sqrt{3}}{2z+x}+\frac{2}{z\sqrt{3}}\text{ ang tang }\frac{y\sqrt{3}}{2z+y}=f(z),$$

il quale per la riunione dei due angoli si riduce a

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\text{ ang tang }\frac{(xz+yz+xy)\sqrt{3}}{2zz+xz+yz-xy}=f(z).$$

Poniamo dunque $\dfrac{xz+yz+xy}{2zz+xz+yz-xy}=Z$, ove Z indica una funzione della z; e siccome è

$\dfrac{1}{Z}=\dfrac{2zz+xz+yz-xy}{xy+xz+yz}$, si avrà

$1+\dfrac{1}{Z}=\dfrac{2z(x+y+z)}{xy+xz+yz}$, e perciò

$\dfrac{xy+xz+yz}{x+y+z}=\dfrac{2Zz}{1+Z}=Fz$. Abbandonata ora la funzione Z, poniamo subito che l'integrale della proposta sia $\dfrac{xy+xz+yz}{x+y+z}=\Sigma=Fz$, e presane la differenziale totale, troveremo $\left(\dfrac{d\Sigma}{dz}\right)=0$, e quindi

$\Sigma = cost$. Sarà pertanto $\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = cost$, ovvero $xy + xz + yz = C(x + y + z)$ il cercato integrale completo.

E qui osservo che talvolta l'equazione può essere integrabile senza che sia soddisfatto il criterio d'integrabilità. Ciò succede quando la relazione tra le variabili dataci dal criterio non soddisfatto, soddisfà essa medesima al proposto differenziale. Tale relazione è allora un integrale particolare, perchè in lei non possono trovarsi altre costanti che quelle contenute nel differenziale dato.

Per esempio, l'equazione $(z - y)\,dx + xdy + (y - z)\,dz = 0$ comparisce non integrabile perchè il criterio d'integrabilità $z - x - y = 0$ non è un'equazione identica: pure essa ha per integrale particolare la stessa $z - x - y = 0$, giacchè facendo $z = x + y$, la proposta rimane soddisfatta.

§ 288. Negli addotti esempj le variabili x, y, z componevano in ciascun termine lo stesso numero di dimensioni: ponendo mente a questa condizione, si può avere un metodo generale per trattare simili equazioni: eccolo.

Supponendo dunque che i coefficienti P, Q, R dell'equazione differenziale $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ siano funzioni omogenee di x, y, z di un numero qualunque n di dimensioni, poniamo $x = pz$, $y = qz$, e si avrà $P = z^n S$, $Q = z^n T$ e $R = z^n V$, ove S, T, V saranno funzioni delle due variabili p, q. Essendo poi $dx = pdz + zdp$, $dy = qdz + zdq$, la nostra equazione prenderà questa forma $dz\,(pS + qT + V) + Szdp + Tzdq = 0$, ovvero $\frac{dz}{z} + \frac{Sdp + Tdq}{pS + qT + V} = 0$, della quale non potrà aversi

l' integrale se la formola differenziale a due variabili $\frac{Sdp + Tdq}{pS + qT + V}$ non è integrabile da sè medesima, il che succederà se l' equazione

$$(qT + V)\left(\frac{dS}{dq}\right) + pT\left(\frac{dS}{dp}\right) - (pS + V)\left(\frac{dT}{dp}\right)$$

$$- qS\left(\frac{dT}{dq}\right) - S\left(\frac{dV}{dq}\right) + T\left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$$ sarà identica:

l' integrale allora sarà $lz + \int \frac{Sdp + Tdq}{pS + qT + V} = cost$, ove converrà porre $\frac{x}{z}$ in vece di p, ed $\frac{y}{z}$ in vece di q.

§ 289. Abbiamo fin qui considerate l' equazioni del primo ordine nelle quali i differenziali non sono elevati al di là della prima potenza: se ciò non fosse, bisognerebbe incominciare dal ridurre l' equazioni differenziali a questo stato, quando è possibile, e cercarne in appresso l' integrale. Se questa riduzione non succede, possiamo assicurare che la equazione proposta non è la differenziale esatta di alcuna equazione fra tre variabili x, y, z.

Data l' equazione

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz,$$

si trova subito

$$dz = \frac{Tdx + Vdy}{R} \pm$$

$$\frac{\sqrt{\{(T^2 - PR)dx^2 + 2(TV + RS)dxdy + (V^2 - QR)dy^2\}}}{R},$$

Ora sparirà l' irrazionalità del valore di dz, quando $(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$, cioè quando $R = \frac{PV^2 + 2STV + QT^2}{PQ - S^2}$; dunque proposta

una simile equazione di secondo grado, converrà prima di tutto che sia soddisfatta questa condizione tra i di lei coefficienti, onde possa ridursi al primo, ed esser suscettiva dell' applicazione delle regole date qui sopra. In generale qualunque sia il grado dell' equazione differenziale del primo ordine, bisogna che sia decomponibile in fattori di primo grado di questa forma $Mdx + Ldy + Ndz = 0$, onde possa tentarsene l' integrazione.

§ 290. Passando a considerare l' equazione differenziale a quattro variabili $Pdx + Qdy + Sdu + Rdz = 0$, se questa diviene integrabile per la moltiplicazione di un fattore M, è necessario che
$MPdx + MQdy + MRdz + MSdu = 0$ sia il differenziale di un' altra equazione $V = 0$ fra le stesse variabili x, y, u, z; sia, cioè, nata dall' attuale differenziazione di $V = 0$, se tutte le variabili y, u, z si risguardano come funzioni della x; o sia l' aggregato dei tre differenziali parziali di $V = 0$, se risguardasi z qual funzione di tutte le altre x, y, u, queste essendo indipendenti tra loro.

Ora se quell' equazione è una differenziale esatta rispetto a tutte le variabili x, y, u, z, le tre seguenti saranno anche tre differenziali esatte

$MPdx + MQdy + MRdz = 0$, rispetto ad x, y, z;

$MQdy + MSdu + MRdz = 0$, rispetto ad u, y, z;

$MPdx + MSdu + MRdz = 0$, rispetto ad x, u, z;

dunque quando la proposta moltiplicata per M potrà divenire una differenziale esatta, ed essere in conseguenza integrabile, saranno vere queste tre equazioni di condizione

$$R\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right)\right\} + P\left\{\left(\frac{dQ}{dz}\right) - \left(\frac{dR}{dy}\right)\right\}$$
$$+ Q\left\{\left(\frac{dR}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dz}\right)\right\} = 0,$$

$$R\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{du}\right)\right\}+S\left\{\left(\frac{dQ}{dz}\right)-\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\}$$

$$+Q\left\{\left(\frac{dR}{du}\right)-\left(\frac{dS}{dz}\right)\right\}=0,$$

$$R\left\{\left(\frac{dP}{du}\right)-\left(\frac{dS}{dx}\right)\right\}+P\left\{\left(\frac{dS}{dz}\right)-\left(\frac{dR}{du}\right)\right\}$$

$$+S\left\{\left(\frac{dR}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dz}\right)\right\}=0;$$

quando poi non saranno soddisfatti questi tre criterj, potremo asserire che non esiste in natura una equazione $V=0$, la cui differenziale esatta eguagli la proposta moltiplicata per un fattore.

§ 291. Quando una data equazione differenziale $Pdx+Qdy+Rdz=0$ non è, nè colla moltiplicazione di un fattore può diventare una differenziale esatta, allora è impossibile aversi un' equazione $V=0$ tra le variabili x, y, z la quale ne possa rappresentare l' integrale, ed è un segno indubitato che due di quelle variabili non sono indipendenti tra loro: quell' equazione differenziale esser non può che il risultamento di due altre equazioni, ed il complesso di queste chiamasi il di lei integrale.

Per trovare siffatto integrale la discorro così: se fra le tre variabili x, y, z debbono aversi due equazioni, è giocoforza che due di queste variabili z, y, per esempio, siano funzione della terza x; la proposta equazione adunque, se vi si riguardi il dy ed il dz come i differenziali delle y, z rispetto all' x, potrà prendere questa forma

$P+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)+R\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, ed allora si vede subito (§ 284) che per mezzo di essa non possono determinarsi i valori della y e della z, e che bisogna

prendere arbitrariamente un' altra equazione qualunque, sia differenziale, sia finita, tra x, y, z, la quale sia vera insieme con la proposta, onde restino allora determinate le due variabili y e z.

Di fatto, mercè l' equazione arbitraria che assumeremo, la proposta potrà ridursi a contenere soltanto due variabili; sarà allora suscettiva d' integrazione, ed il complesso dell' integrale di essa coll' equazione assunta formerà l' integrale della proposta. Questo integrale poi, considerato per rispetto alla geometria, rappresenterà una curva a doppia curvatura, anzi infinite curve, a misura che si prenderà diversa l' equazione arbitraria.

§ 292. Si può in molti modi prendere quella equazione arbitraria. Il più semplice è supporre che siffatta equazione sia $z = f(x)$, indicando con $f(x)$ una funzione arbitraria della x, giacchè allora la proposta si ridurrà a questa forma $Sdx + Tdy = 0$, ed il di lei integrale assieme coll' equazione $z - f(x) = 0$ comporrà l' integrale della proposta; per esempio, l' equazione $z^2dx + axdz + ydy = 0$ non sodisfà ai criterj d' integrabilità; e se si fa $z = f(x)$ il complesso di queste due equazioni

$z - f(x) = 0$,

$\frac{y^2}{2} + \int(\overline{fx}^2 + axf'x)\,dx = 0$, ove $f'x$ indica il differenziale di fx diviso per dx, ne forma l' integrale.

Col dare diversi valori alla funzione arbitraria si hanno diversi integrali; così, fatto $fx = mx^n$, si ha quest' integrale $z - mx^n = 0$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{m^2x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{amnx^{n+1}}{n+1} + C = 0,$$

essendo C una costante arbitraria. Che il complesso di queste due equazioni sia veramente l' integrale della proposta equazione, così si può verificare.

Differenziando quelle due equazioni, si ha

$dz - mnx^{n-1}dx = 0$,

$ydy + (m^2x^{2n} + amnx^n)dx = 0$, e sostituendo nella seconda dz in vece di $mnx^{n-1}dx$, si ottiene

$ydy + m^2x^{2n}dx + ax\,dz = 0$, ove ponendo z^2 in vece di m^2x^{2n}, si trova la proposta medesima.

§ 293. Se l' equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ si integra nella supposizione che manchi uno dei suoi termini, per esempio, Rdz, che è quanto dire nella supposizione che z sia costante, converrà che all' integrale dell' equazione $Pdx + Qdy = 0$ si aggiunga un' arbitraria che sia funzione di quella variabile z, e poi confrontando con la proposta il differenziale di un tale integrale, facendo tutto variare, si avrà un' altra equazione la quale assieme col ritrovato integrale dell' equazione $Pdx + Qdy = 0$ formerà quel complesso che è l' integrale completo della proposta medesima; e questo è un altro modo egualmente facile per integrare siffatte equazioni.

Così se l' integrale di $Pdx + Qdy = 0$ è $F(x, y, z) + f(z) = 0$, indicando con $f(z)$ una funzione arbitraria della z, l' integrale dell' equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ sarà il complesso delle due equazioni

$F(x, y, z) + f(z) = 0$,

$R = \left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)$.

In questa guisa l' integrale completo dell' equazione $z^2dx + axdz + ydy = 0$ è $z^2x + \frac{y^2}{2} + f(z) = 0$,

$2xz + \left(\frac{df}{dz}\right) = ax$.

Rispetto poi alla variabile che ha da supporsi costante, conviene scegliere quella la quale conduce ad un' equazione più facile ad integrarsi.

§ 294. Talvolta un idoneo valore della funzione arbitraria riduce le due equazioni ad una sola, ed allora l'integrale è dato da questa sola equazione.

Per esempio, l' equazione

$$(y-z)\,dz + x\,dy + (z-y)\,dx = 0$$

ha per integrale il complesso delle due equazioni

$$z = x + f(y), \quad z - y = x : \left(\frac{df}{dy}\right),$$

le quali si riducono ad una sola $z = x + y$ se si fa $f(y) = y$. Così per quanto quell'equazione differenziale non abbia i criterj d' integrità soddisfatti, pure resta essa verificata da una equazione, priva però di costante arbitraria.

In questa guisa è spiegata l' origine di quelle relazioni le quali talune volte (§ 287) soddisfanno alle equazioni di sua natura non integrabili, e che vengono date dai criterj d' integrabilità. Questa osservazione è del professore Paoli.

§ 295. Spesso a colpo d' occhio si presenta qualche soluzione elegante di una equazione che non soddisfaccia ai criterj d' integrabilità; così se fosse proposta $dz = xy\,(x\,dx + y\,dy)$, si vede subito che il di lei integrale è il complesso di queste due equazioni $z = \phi\,(x^2 + y^2)$, $xy = \phi'\,(x^2 + y^2)$, ed esso ci indica che la proposta rappresenta una proprietà la quale appartiene (non però esclusivamente) ad una curva a doppia curvatura disegnata sopra una qualunque superficie di rivoluzione, l' asse della quale coincide con quello delle z, mentre la projezione di questa curva sul piano delle x, y dipende dalla curva generatrice, nel modo che indica la seconda di quelle equazioni.

Così l' altra equazione $dz = xy\,(dx - dy)$ ha per integrale l'equazioni $z = \phi\,(x-y)$, $xy = \phi'\,(x-y)$,

le quali significano che essa appartiene (non però esclusivamente) ad una curva a doppia curvatura, disegnata sopra una superficie cilindrica di qualunque base, essendo le rette della superficie parallele alla retta che divide in due parti eguali l' angolo formato dagli assi della x e della y; la projezione poi di questa curva sul piano delle x, y dipende dalla base della superficie cilindrica nel modo espresso dalla seconda di quelle due equazioni.

§ 296. Veniamo ora a parlare dell' equazioni differenziali elevate.

Tra tutte l' equazioni differenziali del primo ordine tra due variabili non vi è che la sola equazione $M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} = 0$ che non appartenga ad una curva piana; essa appartiene ad un punto, e l' integrale suo è il complesso delle due equazioni $x = a$, $y = b$, le quali determinano la posizione di questo punto: a, b sono due costanti arbitrarie, quindi l' equazione appartiene a qualunque punto del piano delle x, y.

Per l' equazioni a tre variabili, appartengono esse o ad una superficie curva se sono soddisfatti i criterj d' integrabilità, o a curve a doppia curvatura se ciò non succede. Nel primo caso una equazione con una costante arbitraria, e nel secondo due equazioni con una funzione arbitraria ne formano l' integrale completo. Fra tali equazioni però ve n' è una sola $M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} + P^2 dz^{2m} = 0$ la quale ha per integrale il complesso di tre equazioni $x = a$, $y = b$, $z = c$, ove a, b, c sono tre costanti arbitrarie; essa poi appartiene ad un qualunque punto dello spazio.

§ 297. Sia proposta l' equazione $dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$. Per integrarla possiamo fare $y = f(x)$, ed allora il di lei integrale è il complesso di queste due equazioni $z = a\int dx \sqrt{\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + 1\right\}}$, $y = f(x)$. Se $a = 1$

allora l'equazione è suscettiva di una elegantissima integrazione, che ci è stata data dal sig. La Grange.

Proposta dunque l'equazione $dz^2 = dx^2 + dy^2$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 dx^2 = dx^2 + dy^2$, quindi

$$dy = \sqrt{\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - 1\right\}}\, dx, \text{ ed}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = \int dx \sqrt{\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - 1\right\}} \\ z = F(x) \end{array}\right.$$

sarà il sistema di due equazioni, che rappresenta l'integrale completo della proposta.

Se con ω rappresentiamo qualunque angolo arbitrario, e moltiplichiamo il secondo membro della proposta per $(sen\,\omega)^2 + (cos\,\omega)^2 = 1$, avremo,

$dz^2 = (dx^2 + dy^2)\{(sen\,\omega)^2 + (cos\,\omega)^2\}$, ovvero

$dz^2 = (dy\,cos\,\omega - dx\,sen\,\omega)^2 + (dy\,sen\,\omega + dx\,cos\,\omega)^2$.

Supponiamo $dy\,sen\,\omega + dx\,cos\,\omega = 0$, ciò che si può fare per essere ω indeterminato, ed allora ci verrà $dz = dy\,cos\,\omega - dx\,sen\,\omega$: così la proposta si è spezzata in queste due

$dy\,sen\,\omega + dx\,cos\,\omega = 0$

$dz = dy\,cos\,\omega - dx\,sen\,\omega$.

Se noi risguardiamo in principio l'angolo ω come costante, gl'integrali di queste due equazioni saranno

$y\,sen\,\omega + x\,cos\,\omega = b$, $z = y\,cos\,\omega - x\,sen\,\omega + a$, a, b, essendo due costanti arbitrarie portateci dalle integrazioni.

Queste due equazioni ci danno i valori di y e z fatti con x, che soddisfanno all'equazione proposta, qualunque d'altronde siano i valori delle tre costanti a, b, ω, del che può assicurarcene la sostituzione.

Ora è facile a comprendersi che gli stessi valori soddisfaranno alla proposta, supponendo anche che le tre quantità a, b, ω siano variabili, purchè le differenziali delle x, y, z restino le stesse, cioè a dire purchè i termini introdotti dalla variazione di a, b, ω si distruggano da sè medesimi.

Basterà dunque per questo differenziare quelle due equazioni rispetto alle quantità a, b, ω, risguardando a, b come funzioni di ω, ed eguagliare a zero i risultamenti di questa differenziazione. Avremo in questa guisa $-y\,sen\,\omega - x\cos\omega + \left(\frac{da}{d\omega}\right) = 0$

$y\cos\omega - x\,sen\,\omega = \left(\frac{db}{d\omega}\right)$;

e siccome è già $y\,sen\,\omega + x\cos\omega = b$, si avrà dunque $-b + \left(\frac{da}{d\omega}\right) = 0$, ciò che dà $\left(\frac{da}{d\omega}\right) = b$, e quindi $\left(\frac{d^2a}{d\omega^2}\right) = \left(\frac{db}{d\omega}\right)$.

Avremo dunque queste tre equazioni:

$$z = y\cos\omega - x\,sen\,\omega + a,$$

$$y\,sen\,\omega + x\cos\omega = \left(\frac{da}{d\omega}\right),$$

$$y\cos\omega - x\,sen\,\omega = \left(\frac{d^2a}{d\omega^2}\right).$$

Ora essendo a una funzione qualunque di ω, indichiamo con $f(\omega)$, $f'(\omega)$, $f''(\omega)$ le tre quantità a, $\left(\frac{da}{d\omega}\right)$, $\left(\frac{d^2a}{d\omega^2}\right)$; le tre equazioni precedenti ci daranno allora questi tre valori per x, y, z:

$$x = \cos\omega \cdot f'(\omega) - sen\,\omega \cdot f''(\omega),$$

$$y = sen\,\omega \cdot f'(\omega) + \cos\omega \cdot f''(\omega),$$

$z = f(\omega) + f''(\omega)$, nei quali $f(\omega)$ è una funzione arbitraria.

§ 298. Queste formole potrebbero servire a trovare delle curve rettificabili; imperocchè se x, y sono le coordinate rettangole di una curva piana, e z l'arco corrispondente, si è dimostrato che risguardando quelle tre variabili come funzioni di un' altra variabile ω, è sempre $\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2$, la quale si riduce all' equazione qui sopra integrata $dz^2 = dx^2 + dy^2$.

Se facciamo $f(\omega) = m\omega + n$, $f'(\omega) = m$, $f''(\omega) = 0$, dalle formole precedenti ricaveremo
$x = m \cos \omega$, $y = m \operatorname{sen} \omega$, $z = m\omega + n$, e questo è il caso del circolo.

Prendendo per $f(\omega)$ delle funzioni qualunque di $\operatorname{sen} \omega$ e $\cos \omega$, avremo quante curve algebratiche vorremo, di cui anche la rettificazione sarà algebratica. Di fatto i valori di quelle tre variabili saranno allora altrettante funzioni algebratiche di $\operatorname{sen} \omega$, $\cos \omega$; potremo quindi trovare i valori di $\operatorname{sen} \omega$, $\cos \omega$ espressi per mezzo delle funzioni algebratiche di x, y, ed in ultimo avremo z dato in funzione algebratica delle coordinate x, y.

§ 299. Per esempio, facendo $f(\omega) = (\operatorname{sen} \omega)^2$, si ha $x = 2(\operatorname{sen} \omega)^3$, $y = 2(\cos \omega)^3$, $z = 2(\cos \omega)^2 - (\operatorname{sen} \omega)^2$;

e perciò $\operatorname{sen} \omega = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\cos \omega = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. L'equazione della curva sarà allora

$$\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \text{ e l'arco } z = 2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Torneremo sopra l' integrazione dell' equazioni elevate dopo aver parlato delle superficie che abbracciano altre superficie, giacchè allora saremo in grado di rilevare alcune belle proprietà di queste equazioni.

CAPO XV.

Integrazione dell' equazioni coi differenziali parziali del primo ordine.

§ 300. La più semplice equazione di questo genere è $Az + B\left(\frac{dz}{dx}\right) + B'\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$, nella quale A, B, B' sono coefficienti costanti.

Per integrarla faccio $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$, essendo α, β, C tre costanti da determinarsi: ciò posto, ho $\left(\frac{dz}{dx}\right) = Ce^{\alpha x + \beta y}\alpha$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = Ce^{\alpha x + \beta y}\beta$, e fatte le debite sostituzioni e riduzioni nella proposta, si ottiene $A + B\alpha + B'\beta = 0$; e di qui scorgesi che la costante C rimane a nostra disposizione, come pure una delle due α, β. Determiniamo β per mezzo dell' α, e fatto $-\frac{A}{B'} = a$, $-\frac{B}{B'} = b$, avremo $\beta = a + b\alpha$, e quindi $z = Ce^{ay} \cdot e^{\alpha(x + by)}$; il cercato integrale pertanto conterrà due costanti arbitrarie α e C, e potrà risguardarsi come completo.

Supponiamo che α sia variabile, che $C = \phi(\alpha)$, e che i termini portati dalla variazione dell' α si annullino da sè medesimi: allora il trovato valore della z continuerà a soddisfare alla proposta, come

se a e C fossero quali erano prima, cioè assolutamente costanti. Con siffatta condizione, a ci sarà dato dall' equazione $\left(\frac{dz}{da}\right) = 0$, che nel nostro caso è

$$\phi(a) \cdot e^{ay} \cdot e^{a(x+by)}(x+by)$$
$$+\left(\frac{d\phi}{da}\right) e^{ay} \cdot e^{a(x+by)} = 0,\ \text{ovvero}$$

$$\left(\frac{d\phi}{da}\right) \cdot \frac{1}{\phi(a)} = -(x+by).$$

Dunque a è una funzione indeterminata della $x+by$; tale anche è dunque $\phi(a)$, ed è pur tale l' espressione $\phi(a)\,e^{a(x+by)}$; se poi rappresentiamo con $\Psi(x+by)$ questa funzione, avremo $z = e^{ay} \cdot \Psi(x+by)$. Anco questo sarà l' integrale completo della proposta, ma in vece delle due costanti C, a conterrà la funzione arbitraria $\Psi(x+by)$; anzi $\Psi(x+by)$ farà appunto le veci della quantità $Ce^{a(x+by)}$.

§ 301. Veniamo all' equazioni con più variabili. Abbiasi l' equazione

$Az + B\left(\frac{dz}{dx}\right) + B'\left(\frac{dz}{dy}\right) + E\left(\frac{dz}{du}\right) = 0$, nella quale i coefficienti sono costanti.

Poniamo $z = Ce^{\alpha x + \beta y + \gamma u}$, essendo α, β, γ tre costanti da determinarsi.

Prendendo i differenziali parziali della z, sostituendoli nella proposta, e riducendo, si avrà l' equazione $A + B\alpha + B'\beta + E\gamma = 0$, la quale serve a determinare una delle tre indeterminate α, β, γ per mezzo delle altre due. Determiniamo γ, e fatto

$-\frac{A}{E}=a, \ -\frac{B}{E}=b, \ -\frac{B'}{E}=c$, si trova

$\gamma=a+b\alpha+c\beta$, e quindi

$z=Ce^{au}\cdot e^{\alpha(x+bu)+\beta(y+cu)}$. Questo sarà l'integrale con tre costanti arbitrarie.

Per trasformare questo integrale in un altro il quale contenga in vece di quelle tre costanti, ovvero in vece del termine $Ce^{\alpha(x+bu)+\beta(y+cu)}$ una funzione arbitraria, faremo così.

Poniamo che sia $C=\phi(\alpha, \beta)$, cioè eguale ad una funzione delle α, β, e che queste quantità siano variabili: poniamo di più che i termini introdotti dalla variazione di esse si distruggano da sè medesimi, ed allora il valore trovato della z continuerà a soddisfare alla proposta, come vi soddisfaceva prima. A motivo di siffatta condizione i valori delle α e β ci saranno dati da queste due equazioni

$$(x+bu)\,\phi(\alpha, \beta)+\left(\frac{d\phi}{d\alpha}\right)=0,$$

$$(y+cu)\,\phi(\alpha, \beta)+\left(\frac{d\phi}{d\beta}\right)=0.$$

Queste ci dichiarano che α e β saranno due funzioni delle quantità $x+bu$, $y+cn$: sarà dunque una funzione arbitraria delle medesime quantità la quantità $\phi(\alpha, \beta)\, e^{\alpha(x+bu)+\beta(y+cu)}$; dunque il cercato integrale sarà

$z=e^{au}\Psi(x+bu, y+cu)$, indicando con Ψ una funzione arbitraria delle due quantità poste tra le parentesi.

Se in vece di determinare γ per mezzo delle α, β, avessimo determinato una di queste, per

esempio, la costante β per mezzo delle a e γ, saremmo giunti a quest' altra espressione dell' integrale

$z = e^{-\frac{a}{c}y}\,\Psi'\left(x - \frac{b}{c}y,\ u + \frac{1}{c}y\right)$, ove Ψ' rappresenta un' altra funzione arbitraria delle quantità tra le parentesi. Quelle due espressioni per altro non sono in sostanza che la stessa; di fatto poniamo

$$\Psi(x + bu,\ y + cu) = \frac{\Psi'\left\{x + bu - \frac{b}{c}(y + cu),\ \frac{1}{c}(y + cu)\right\}}{e^{\frac{a}{c}(y + cu)}},$$ e sarà

$$z = e^{au}\Psi(x + bu,\ y + cu) = \frac{e^{au}\Psi'\left\{x + bu - \frac{b}{c}(y + cu),\ \frac{1}{c}(y + cu)\right\}}{e^{\frac{a}{c}(y + cu)}} =$$

$$e^{-\frac{a}{c}y}\,\Psi'\left(x - \frac{b}{c}y,\ u + \frac{1}{c}y\right).$$

Se le variabili fossero anco di un maggior numero, facil cosa è vedere come dovremmo regolarci.

§ 302. Per integrare l' equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right) + M\left(\frac{dz}{dy}\right) - N = 0$, nella quale M, N sono funzioni delle variabili x, y, z, io suppongo che $Q = \Psi(P)$ sia il di lei integrale completo. Q, P voglio che rappresentino due funzioni della x, y, z da determinarsi, e $\Psi(P)$ una funzione arbitraria del P. Prendo i differenziali parziali del supposto integrale, ed ho

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)-\left\{\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dP}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}\left(\frac{d\Psi}{dP}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)+\left(\frac{dQ}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)-\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right)+\left(\frac{dP}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}\left(\frac{d\Psi}{dP}\right)=0,$$

dai quali ricavando i valori del $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ e del $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ e sostituendoli nella proposta, io trovo l' equazione

$$(a)\ldots\left(\frac{dQ}{dx}\right)+M\left(\frac{dQ}{dy}\right)+\left(\frac{dQ}{dz}\right)N$$
$$-\left\{\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dP}{dy}\right)M+\left(\frac{dP}{dz}\right)N\right\}\left(\frac{d\Psi}{dP}\right)=0,$$

che debb' essere identica senza dipendere dalla funzione $\Psi(P)$.

Ora se con i coefficienti M, N della proposta si fanno le due equazioni differenziali $dy-Mdx=0$, $dz-Ndx=0$, e di queste o di due altre che da esse dipendano, si prendono gl' integrali, i quali ci diano due equazioni $P=a$, $Q=b$ (essendo a, b le due costanti arbitrarie, e P, Q due funzioni delle x, y, z), questi valori appunto del P e del Q saranno quei che godono il vantaggio di rendere nullo il primo membro dell' equazione (a), senza alcun riguardo alla funzione $\Psi(P)$. Di fatto presi i differenziali delle due equazioni $P=a$, $Q=b$, si hanno l' equazioni

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)dx+\left(\frac{dP}{dy}\right)dy+\left(\frac{dP}{dz}\right)dz=0,$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)dx+\left(\frac{dQ}{dy}\right)dy+\left(\frac{dQ}{dz}\right)dz=0:$$

ma la sostituzione di $dy=Mdx$, $dz=Ndx$ debbe renderle identiche; dunque le due equazioni

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dP}{dy}\right)M+\left(\frac{dP}{dz}\right)N=0,$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)M+\left(\frac{dQ}{dz}\right)N=0.$$

saranno identiche, e tale perciò sarà anco l' equazione (a); dunque $Q=\Psi(P)$ sarà l' integrale completo della proposta, il quale conterrà una funzione arbitraria $\Psi(P)$ del P.

§ 303. Sia proposta l' equazione

$$(z^2-y)\left(\frac{dz}{dx}\right)+2x(z^2-y)\left(\frac{dz}{dy}\right)+2xz=0;$$

paragonata questa con la formola generale del § antecedente, si ha $M=2x$, $N=-\frac{2xz}{z^2-y}$: le due equazioni differenziali dunque saranno $dy-2xdx=0$, $dz+\frac{2zxdx}{z^2-y}=0$: sostituendo il valore del dx nella seconda equazione, si ha $dz+\frac{zdy}{z^2-y}=0$, la quale si riduce integrabile moltiplicata pel fattore $\frac{z^2-y}{z^2}$: si ha di fatto $dz+\frac{zdy-ydz}{z^2}=0$, il cui integrale completo è $z+\frac{y}{z}=b$; ed essendo l'integrale della prima equazione $y-x^2=a$, avremo subito l' integrale completo $z+\frac{y}{z}=\Psi(y-x^2)$.

Per un altro esempio, sia l' equazione $x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)+z=0$, e si avrà $M=\frac{y}{x}$, $N=-\frac{z}{x}$,

e quindi $dy - Mdx = 0$, $dz - Ndx = 0$ divengono $dy - \frac{y}{x} dx = 0$, $dz + \frac{z}{x} dx = 0$, i cui integrali sono $\frac{y}{x} = a$, $zx = b$, e perciò $zx = \psi \left(\frac{y}{x} \right)$ sarà il cercato integrale.

§ 304. Sia l' equazione tra quattro variabili $\left(\frac{dz}{dx} \right) + L \left(\frac{dz}{dy} \right) + M \left(\frac{dz}{du} \right) = N$, nella quale i coefficienti L, M, N siano funzioni delle x, y, z, u. Supponiamo il di lei integrale $R = \Psi(P, Q)$, indicando con P, Q, R tre funzioni di quelle variabili da determinarsi, e con $\Psi(P, Q)$ una funzione arbitraria delle due P e Q.

Ciò posto, e battendo la stessa strada battuta pre giungere (§ 302) all' integrale dell' equazioni fra tre variabili, prendendo, cioè, i tre differenziali parziali del supposto integrale, cavando da essi i valori di $\left(\frac{dz}{dx} \right)$, $\left(\frac{dz}{dy} \right)$, $\left(\frac{dz}{du} \right)$, e sostituendoli nella proposta, si vedrà che dobbiamo prendere per P, Q, R tali valori da rendere identiche queste equazioni

$$\left(\frac{dP}{dx} \right) + L \left(\frac{dP}{dy} \right) + M \left(\frac{dP}{du} \right) + N \left(\frac{dP}{dz} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{dQ}{dx} \right) + L \left(\frac{dQ}{dy} \right) + M \left(\frac{dQ}{du} \right) + N \left(\frac{dQ}{dz} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{dR}{dx} \right) + L \left(\frac{dR}{dy} \right) + M \left(\frac{dR}{du} \right) + N \left(\frac{dR}{dz} \right) = 0,$$

se vogliamo che la proposta sia soddisfatta dall' assunta equazione $R = \Psi(P, Q)$, senza che vi abbia che fare nulla la funzione $\Psi(P, Q)$, pel che resterà essa arbitraria.

Ora se si prendono gl' integrali finiti delle tre equazioni $dy - Ldx = 0$, $du - Mdx = 0$, $dz - Ndx = 0$, o di altre tre che da queste dipendano, e se questi tre integrali finiti sono $P = a$, $Q = b$, $R = c$, essendo a, b, c tre costanti arbitrarie, e P, Q, R tre funzioni delle x, y, u, z, queste tre funzioni saranno appunto quelle le quali renderanno identiche le qui sopra mentovate equazioni; di fatto i differenziali di queste tre integrali sono

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) dx + \left(\frac{dP}{dy}\right) dy + \left(\frac{dP}{dz}\right) dz + \left(\frac{dP}{du}\right) du = 0, \text{ ecc.}$$

E questi divengono altrettante equazioni identiche, ponendovi in vece di dy, dz, du i valori dati da quelle tre equazioni differenziali, delle quali essi erano gl' integrali. Saranno dunque equazioni identiche l' equazioni

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) L + \left(\frac{dP}{du}\right) M + \left(\frac{dP}{dz}\right) N = 0, \text{ ecc.}$$

Sarà dunque $R = \Psi\,(P, Q)$ il completo integrale della proposta.

E di qui si vede come dovrà farsi per l' equazioni con un maggior numero di variabili. Ciascuna poi dell' equazioni $P = a$, $Q = b$, $R = c$ è un integrale particolare della proposta.

L' integrazione pertanto dell' equazioni coi differenziali parziali dipende da quella dell' equazioni differenziali ordinarie. [1]

§ 305. Per illustrare queste dottrine, prendiamo l' equazione

$$(2z - 2y)\left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right) - (x + 2z^2 - 2zy)\left(\frac{dz}{du}\right) - 1 = 0.$$

Questa ci dà

$$L = -\frac{1}{2z - 2y}, \quad M = -\frac{x + 2z^2 - 2zy}{2z - 2y}, \quad N = \frac{1}{2z - 2y},$$

e le tre equazioni differenziali saranno

(1) . . . . . $dy + \frac{dx}{2z - 2y} = 0$,

(2) . . . . . $du + \frac{x + 2z^2 - 2zy}{2z - 2y} dx = 0$,

(3) . . . . . $dz - \frac{dx}{2z - 2y} = 0$.

Dall' equazioni (1), (3) si ricava

(4) . . . . . $dz + dy = 0$;

Dall' equazioni (1) e (4) si ricava

(5) . . . . . $2zdz + 2ydy - dx = 0$;

Dall' equazioni in fine (3), (2) si ricava

(6) . . . . . $du + xdz + zdx = 0$:

ora gl' integrali completi dell' equazioni (4), (5), (6) sono $z + y = a$, $z^2 + y^2 - x = b$, $u + xz = c$; dunque $z^2 + y^2 - x = \Psi(z + y, u + xz)$ sarà l' integrale completo cercato.

§ 306. Consideriamo ora l' equazioni che non sono lineari.

Se rappresentiamo $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ con p, q, la formola $F(x, y, z, p, q) = 0$, nella quale F significa una funzione qualunque delle quantità che si trovano tra le parentesi, sarà quella di un' equazione qualunque coi differenziali parziali del primo ordine.

Essendo z una funzione delle variabili x, y, sarà sempre $dz = pdx + qdy$.

Ora p, q non potendo esser funzioni di altre quantità che delle variabili x, y, z, se noi consideriamo l' equazione $dz - pdx - qdy = 0$ come una equazione differenziale a tre variabili, si sa (§ 287) che debbe sussistere quest' equazione di condizione onde essa sia una equazione differenziale esatta

$$(e) \ldots \left(\frac{dq}{dx}\right) - \left(\frac{dp}{dy}\right) + p\left(\frac{dq}{dz}\right) - q\left(\frac{dp}{dz}\right) = 0.$$

L' equazione data somministra poi questi tre differenziali parziali relativamente a x, y, z:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dy}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$ e per loro mezzo potremo eliminare i differenziali parziali del p o del q dall' equazione (e).

Eliminiamo quelle del q, e siccome la prima e la terza di queste equazioni ci danno

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} - \frac{\left(\frac{dF}{dp}\right)}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dq}{dz}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dz}\right)}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} - \frac{\left(\frac{dF}{dp}\right)}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dz}\right),$$ perciò l' equazione (e) si cangerà in quest' altra

$$) \ldots \left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)$$

$$+ \left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right)\right\}\left(\frac{dp}{dz}\right) = 0,$$

nella quale i differenziali parziali dell' incognita p sono innalzati alla prima potenza, ed i coefficienti

sono funzioni della x, y, z, p; non vi consideriamo il q, poichè lo elimineremo per mezzo della proposta.

Quest' equazione essendo integrata ci darà il valore del p; quello del q ci sarà dato dall' equazione $F(x, y, p, q, z)=0$; e questi due valori del p e del q, che saranno allora funzioni cognite della x, y, z, sostituiti in $dz - pdx - qdy = 0$, la renderanno integrabile, ed il di lei integrale sarà nel tempo stesso l' integrale dell' equazione proposta

$$F\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}=0.$$

§ 307. Se noi pertanto paragoniamo l' equazione (f) con l' equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right)+L\left(\frac{dz}{dy}\right)+M\left(\frac{dz}{du}\right)=N$ del (§ 304), si vedrà che le nostre variabili x, y, z, p corrispondono ivi alle x, y, u, z, e che perciò è

$$L=\left(\frac{dF}{dq}\right):\left(\frac{dF}{dp}\right),$$

$$M=\quad\left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right)+q\left(\frac{dF}{dq}\right)\right\}:\left(\frac{dF}{dp}\right),$$

$$N=-\left\{\quad\left(\frac{dF}{dx}\right)+p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right\}:\left(\frac{dF}{dp}\right);$$ onde le tre

equazioni differenziali, dall' integrazione delle quali dipende quella dell' equazione (f), sono

$$(1)\ldots.\left(\frac{dF}{dp}\right)dy-\left(\frac{dF}{dq}\right)dx=0,$$

$$(2)\ldots.\left(\frac{dF}{dp}\right)dz-\left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right)+q\left(\frac{dF}{dq}\right)\right\}dx=0,$$

$$(3)\ldots.\left(\frac{dF}{dp}\right)dp+\left\{\quad\left(\frac{dF}{dx}\right)+p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right\}dx=0.$$

Siccome queste tre equazioni non contengono che quattro variabili x, y, z, p, perciò potremo da esse ricavare un' equazione con due variabili sole, e così tutta la difficoltà sarà ridotta all' integrazione dell' equazioni con due variabili.

Supponiamo ora che gl' integrali di quelle tre equazioni, o di altre da esse dedotte, siano $P = a$, $Q = b$, $R = c$, essendo P, Q, R tre funzioni determinate della x, y, z e p, ed a, b, c tre costanti arbitrarie, e $R = \phi(P, Q)$ sarà (§ 304) l' integrale completo della equazione (f).

Questa equazione $R = \phi(P, Q)$, combinata con l' equazione data $F(x, y, z, p, q) = 0$, darà i valori di p e q espressi per mezzo di x, y, z, che sostituiti in $dz - pdx - qdy = 0$ la renderanno integrabile, e l' integrale di essa sarà l' integrale della equazione proposta, e sarà completo perchè conterrà la funzione arbitraria $\phi(P, Q)$.

§ 308. L' integrale, da noi trovato, è una quantità composta delle x, y, z e della funzione arbitraria $\phi(P, Q)$, essendo P, Q due funzioni determinate delle x, y, z.

La proposta equazione adunque debb' essere il risultamento della eliminazione di quella funzione arbitraria ϕ, il quale si ottiene col mezzo dell' integrale e dei suoi differenziali parziali. Ma (§ 30) dimostrammo che una siffatta funzione non si può mai mandar via per mezzo dei differenziali parziali del primo ordine; dunque sembra che le nostre teoriche si trovino in contraddizione tra loro. Dichiariamo ora come questa contraddizione è soltanto apparente.

Le tre equazioni $P = a$, $Q = b$, $R = c$ soddisfanno per ipotesi alle tre equazioni del primo ordine (1), (2), (3): ora se da queste medesime tre equazioni $P = a$, $Q = b$, $R = c$ noi ricaviamo i valori delle x, y, z che saranno funzioni del p e delle costanti a, b, c, e li sostituiamo in quelle tre equazioni differenziali, diverranno esse necessariamente identiche, di modo che queste sostituzioni

renderanno i primi membri nulli, qualunque siano i valori di p, a, b, c.

Ma il primo membro dell' equazione (1), moltiplicato per q e sottratto dal primo membro della equazione (2), ci dà $\left(\frac{dF}{dp}\right)\{dz - pdx - qdy\} = 0$; dunque se nella formola $dz - pdx - qdy$ facciamo le medesime sostituzioni, il risultamento sarà ancora per sè medesimo nullo.

Supponiamo a, b, c quantità variabili, e nel sostituire in $dz - pdx - qdy$ i valori di x, y, z e' dei loro differenziali, tutti i termini si distruggeranno tra loro come prima, eccettuati quei che introduce la variazione di quelle costanti: resteranno dunque termini di questa forma $Ada + Bdb + Cdc$, ove A, B, C saranno funzioni di p, a, b, c.

Dunque l' equazione $dz - pdx - qdy = 0$, diverrà $Ada + Bdb + Cdc = 0$; e la condizione che debbe renderla suscettiva d' essere integrata, sarà, mercè di ciò che abbiamo trovato, $c = \phi(a, b)$, poichè la sostituzione dei valori di x, y, z, fatti con p, a, b, c, dà $P = a$, $Q = b$, $R = c$, donde questi valori suppongonsi ricavati.

Ora prendendo i differenziali, si ha

$dc = \left(\frac{d\phi}{da}\right)da + \left(\frac{d\phi}{db}\right)db$; dunque facendo queste sostituzioni, l' equazione

$\left\{A + C\left(\frac{d\phi}{da}\right)\right\}da + \left\{B + C\left(\frac{d\phi}{db}\right)\right\}db = 0$ avrà necessariamente un integrale; ma ciò non può accadere senza che la variabile p svanisca da sè medesima da questa equazione (giacchè la differenziale sua dp è sparita); dunque quell' ultima equazione sarà un' equazione differenziale tra due variabili,

e però sempre suscettiva d' integrazione : sarà dunque b una funzione dell' a : sarà di più funzione arbitraria a causa dell' arbitraria $\phi(a, b)$ che nella suddetta equazione differenziale si contiene.

Così le due quantità b, c saranno necessariamente l' una e l' altra funzione dell' a soltanto, ma bisognerà che soddisfacciano all' equazione

$Ada + Bdb + Cdc = 0$.

Sia dunque $b = \Psi a$, $c = \phi a$, e sostituendole in questa equazione, avremo

$A + B\left(\frac{d\Psi}{da}\right) + C\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$, la quale contiene una relazione tra le due funzioni Ψa, ϕa, una restandone a nostra disposizione.

Frattanto se in vece delle a, b, c si rimettono i loro valori P, Q, R, si avrà, onde esprimere l' integrale cercato, il sistema di due equazioni $Q = \Psi P$, $R = \phi P$, e da esse eliminando p, si otterrà un' equazione tra x, y, z con una funzione arbitraria.

Questa è la soluzione diretta e completa del problema, ma vedremo che in molti casi puossi rendere più semplice.

§ 309. Per esempio, prendiamo l' equazione

$z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$: paragonando questa equazione con la formola generale, si avrà

$F(x, y, z, p, q) = z - pq = 0$: dunque

$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{dz}\right) = 1$, $\left(\frac{dF}{dp}\right) = -q$,

$\left(\frac{dF}{dq}\right) = -p$; le tre equazioni del primo ordine diverranno dunque

$-qdy+pdx=0$, $-qdz+2pqdx=0$,

$-qdp+pdx=0$: ma l'equazione $z=pq$ dà $q=\frac{z}{p}$; dunque le tre equazioni di cui si tratta, diverranno $zdy-p^2dx=0$, $dz-2pdx=0$, $zdp-p^2dx=0$.

La prima e l'ultima danno $dy=dp$, e quindi $y=p+a$, essendo a una costante arbitraria. La seconda poi e la terza ci danno $pdz=2zdp$, cioè $\frac{dz}{z}=\frac{2dp}{p}$, il cui integrale è $z=bp^2$, essendo b un' altra costante arbitraria.

Finalmente, se nella prima equazione sostituiamo dp in vece del dy, e bp^2 in vece della z, e dividiamo per p^2, avremo $bdp-dx=0$, il cui integrale è $x=bp+c$, essendo c la terza costante arbitraria.

Per mezzo di questi tre integrali troviamo i valori delle tre costanti a, b, c, ed avremo

$$a=y-p=P;\ b=\frac{z}{p^2}=Q;\ c=x-\frac{z}{p}=R.$$

Frattanto se nell' equazione $dz-pdx-qdy=0$ si sostituisce per q il suo valore $\frac{z}{p}$, ella diventa $dz-pdx-\frac{zdy}{p}=0$; e se in luogo della x, y, z si pongono i loro trovati valori, e si risguardano come variabili le quantità a, b, c, si ha la trasformata

$p^2db+2bpdp-p^2db-bpdp-pdc-bpdp-bpda=0$, la quale diviene semplicemente $dc+bda=0$.

Dunque facendo $b=\Psi a$, $c=\phi a$, si avrà $\left(\frac{d\phi}{da}\right)+\Psi a=0$, che ci dà $\Psi a=-\left(\frac{d\phi}{da}\right)$: in questa guisa avremo il sistema di queste due equazioni

$R = \phi(P)$, $Q = -\left(\frac{d\phi(P)}{dP}\right)$ per rappresentare l'integrale completo della proposta.

Se ora noi indichiamo con $\phi'(P)$ il differenziale parziale $\left(\frac{d\phi(P)}{dP}\right)$, e poniamo in vece di P, Q, R i rispettivi valori, avremo

$x - \frac{z}{p} = \phi(y-p)$, $\frac{z}{p^2} = -\phi'(y-p)$, donde bisognerebbe eliminare p, e la funzione $\phi(y-p)$ resterebbe arbitraria.

§ 310. Un' importantissima osservazione è la segnente: allorchè si sono trovati due integrali contenenti due costanti arbitrarie, come, per esempio, $y = p + a$ e $z = p^2 b$, sembrerebbe che l' eliminazione del p potesse dare un integrale con due costanti arbitrarie, che sarebbe per conseguenza l' integrale completo della proposta, e potrebbe sempre cangiarsi in un altro che contenesse la funzione arbitraria: in questa guisa avremmo $z = b(y-a)^2$; ma è facile vedere che quest' equazione non soddisfà alla proposta $z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$, perchè essa dà $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

Lo stesso avverrebbe se si volesse eliminare p dalla seconda e terza equazione: avremmo allora $c = x - \sqrt{(bz)}$, cioè $z = \frac{(x-c)^2}{b}$, e di qui $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$.

Ma se si adoprasse la prima e l' ultima, l' eliminazione di p ci darebbe $c = x - \frac{z}{y-a}$, donde si ricaverebbe $z = (x-c)(y-a)$: quest' equazione dà $\left(\frac{dz}{dy}\right) = x - c$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = y - a$, e tai valori soddisfanno alla proposta.

La ragione di queste anomalie si legge nella equazione $dc + bda = 0$ trovata qui sopra.

Essa fa vedere che le due quantità a, c possono esser costanti insieme, che perciò le due equazioni $P = a$, $R = c$ sussistono insieme, di modo che eliminando p, si ha un' equazione tra x, y, z e le due costanti arbitrarie a, c; ch' è per conseguenza l'integrale completo della proposta; ma l' equazione non sarebbe verificata colla semplice supposizione di a e b, ovvero di b e c costanti insieme; e di qui ne conséguita che le due equazioni $P = a$, $Q = b$, ovvero $Q = b$, $R = c$ prese insieme non soddisfanno alla proposta.

§ 311. E si può per altro trovare l'integrale completo per mezzo di una sola di queste equazioni $P = a$, $Q = b$, $R = c$: essa di fatto ci dà un valore del p espresso per mezzo delle x, y, z ed una costante arbitraria; e siccome questo valore soddisfà all' equazione del primo ordine tra x, y, z e p, esso renderà perciò l' equazione $dz - pdx - qdy = 0$ suscettiva d' integrazione: così basterà cercare questo integrale aggiungendovi una costante arbitraria, e si avrà l' integrale completo della proposta con due costanti arbitrarie.

Si potrà anche ricavare dall' equazione trovata il valore del p espresso per mezzo delle x, y, z; e siccome $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, se ne cercherà l' integrale risguardando variabili soltanto z e x: quest' equazione potrà allora contenere una funzione arbitraria della y, che si determinerà facilmente per mezzo dell' equazione proposta: e siccome questa è del primo ordine, la funzione conterrà almeno una costante arbitraria, di modo che si avrà nuovamente un integrale completo con due costanti arbitrarie.

Nell' esempio precedente prendiamo la prima equazione $P = a$, cioè $y - p = a$: ella ci dà $p = y - a$; e siccome si ha $q = \frac{z}{p}$, sarà $q = \frac{z}{y - a}$.

Sostituiti questi due valori nell' equazione $dz - pdx - qdy = 0$, danno $dz - (y - a)\, dx - \frac{zdy}{y-a} = 0$, e quest' equazione divisa per $y - a$, ha per integrale $\frac{z}{y-a} - x + c = 0$, ove c è una nuova costante arbitraria; tale equazione è quella trovata qui sopra per mezzo dell' eliminazione del p.

La medesima equazione $p = y - a$ diviene $\left(\frac{dz}{dx}\right) = y - a$, quando in vece di p vi si pone il suo valore $\left(\frac{dz}{dx}\right)$. L' integrale poi della equazione $dz = (y - a)\, dx$ è $z = (y - a)\,(x - Y)$, indicando per Y una funzione arbitraria della y.

Se ora prendiamo i differenziali parziali della z rispetto ad x e rispetto ad y, avremo $\left(\frac{dz}{dx}\right) = y - a$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = x - Y - (y - a)\left(\frac{dY}{dy}\right)$: e sostituendo queste espressioni nella proposta $z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$, si avrà

$$(y - a)\,(x - Y) = (y - a)\,(x - Y) - (y - a)^2\, Y',$$

essendo $Y' = \left(\frac{dY}{dy}\right)$: da quest' ultima equazione si ricava $Y' = 0$, e per conseguenza $Y = c$ prendendo per c una costante arbitraria: l' integrale dunque sarà $z = (y - a)\,(x - c)$, come si trovò qui sopra.

Per ricavare da quest' equazione l' integrale completo con una funzione arbitraria, basterà fare $c = \phi\,(a)$, e prendere la differenziale solo relativamente ad a: si avrà allora il sistema di queste due equazioni

$z = (y - a)(x - \phi a)$, $x - \phi(a) + (y - a)\phi' a = 0$,
d' onde si dovrà eliminare a.

A confrontare queste equazioni con quelle trovate superiormente mercè del metodo generale, basta metterle sotto questa forma

$$x - \frac{z}{y-a} = \phi a, \quad \frac{z}{(y-a)^2} = -\phi' a;$$ giacchè potendo noi mettere in vece della quantità a, che debb' essere eliminata, qualunque quantità, se vi si pone $y - p$ in vece di a, si hanno le stesse equazioni di già trovate, tra le quali conviene eliminare p.

La dottrina da noi esposta rispetto all' integrazione dell' equazioni a differenziali parziali del primo ordine non lineari debbesi all' immortale La Grange.

CAPO XVI.

Integrazione dell' equazioni lineari coi differenziali parziali degli ordini superiori.

§ 312. Io parlerò soltanto dell' equazioni lineari, di quelle, cioè, che hanno la variabile principale e le differenze parziali di essa non elevate a potenze maggiori della prima. Queste di fatto sono le sole per le quali si abbiano in certi casi regole generali. Tutte le altre, quando non possono ridursi lineari, non ammettono integrazione, se non in alcuni casi particolarissimi, e dei quali non torna il conto trattare.

Sia l' equazione del secondo ordine con i coefficienti costanti.

$$\left.\begin{array}{l} Az + B\left(\frac{dz}{dx}\right) + E\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \\ \quad + B'\left(\frac{dz}{dy}\right) + E'\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \\ \qquad + E''\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Facciamo $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$, e sostituendo e dividendo per $Ce^{\alpha x + \beta y}$, avremo fra α e β quest'equazione di secondo grado

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + E\alpha^2 \\ \quad + B'\beta + E'\alpha\beta \\ \qquad + E''\beta^2 \end{array}\right\} = 0,$$

dalla quale potremo determinare β per mezzo della α, ovvero α per mezzo del β. Questa equazione sia primieramente risolubile in due fattori di primo grado $\beta - b\alpha - a$, $\beta - b'\alpha - a'$, ed avremo $\beta = a + b\alpha$, ovvero $\beta = a' + b'\alpha$.

Questi due valori del β ci danno due valori della z, cioè

$z = Ce^{ay} \cdot e^{\alpha(x + by)}$, $z = C'e^{a'y} \cdot e^{\alpha'(x + b'y)}$;

con C', α' sono indicate due altre costanti arbitrarie diverse da C, α.

Anche la somma di questi due valori della z, cioè

$z = e^{ay} \cdot Ce^{\alpha(x + by)} + e^{a'y} \cdot C'e^{\alpha'(x + b'y)}$ soddisfarà alla proposta.

Ora poniamo (§ 300) $\phi(x + by)$ in vece di $Ce^{\alpha(x + by)}$, e $\phi'(x + b'y)$ in vece di $C'e^{\alpha'(x + b'y)}$,

ed avremo l' integrale completo della proposta rappresentato da

$z = e^{ay}\,\phi(x + by) + e^{a'y}\,.\,\phi'(x + b'y)$, essendo $\phi(x + by)$, $\phi'(x + b'y)$ due funzioni arbitrarie.

§ 313. Quando la risoluzione della suddetta equazione in due fattori del primo grado può farsi, allora l' integrale non ha più quella forma.

Supponiamo dunque che si abbia $\beta = M$, $\beta = M'$, essendo M, M' due quantità composte in qualunque maniera dell' α e dei coefficienti dell' equazione, di modo che la detta equazione sia eguale al prodotto $(\beta - M)(\beta - M')$: avremo allora

$z = Ce^{\alpha x + My}$, $z = C'e^{\alpha' x + M'y}$, ed anche

$z = Ce^{\alpha x + My} + C'e^{\alpha' x + M'y}$: questa espressione di z contiene quattro costanti arbitrarie diverse, essendo in nostro potere prendere le costanti del secondo termine diverse da quelle del primo.

Fingasi ora che la quantità e^{My} ridotta in serie secondo le potenze intiere dell' α sia

$e^{My} = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 +$ ecc., ove T, T', T'' ecc., sono funzioni della y, ed avremo

$Ce^{\alpha x + My} = T\,Ce^{\alpha x} + T'\,Ce^{\alpha x}\alpha + T''Ce^{\alpha x}\alpha^2 +$ ecc.;

ma ponendo $\phi(x)$ in vece di $Ce^{\alpha x}$, dovrà porsi $\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)$ in vece di $Ce^{\alpha x}\,.\,\alpha$, $\left(\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right)$ in vece di $Ce^{\alpha x}\,.\,\alpha^2$ ecc., dunque

$$Ce^{\alpha x + My} = T\phi(x) + T'\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + T''\left(\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right)$$

$$+ T'''\left(\frac{d^3\phi(x)}{dx^3}\right) + \text{ecc.}$$ Lo stesso raziocinio ci darà

$$C'e^{a'x + M'y} = T1 \cdot \phi'(x) + T'1 \cdot \left(\frac{d \cdot \phi'(x)}{dx}\right)$$

$$+ T''1 \cdot \left(\frac{d^2\phi'(x)}{dx^2}\right) + \text{ecc., essendo } T1,\ T'1 \text{ ecc.}$$

i coefficienti dello sviluppo di $e^{M'y}$.

L' integrale dunque completo con due funzioni arbitrarie sarà

$$z = T\phi(x) + T'\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + .\ T''\left(\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

$$+ T1 \cdot \phi'(x) + T'1 \cdot \left(\frac{d\phi'(x)}{dx}\right) + T''1 \cdot \left(\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

§ 314. Si potrebbe applicare questo metodo alle equazioni lineari del terzo ed anco degli ordini più alti; sempre giungesi ad un' equazione algebratica che ha quelle due indeterminate α, β, e conviene risolverla per trovare il valore dell' una espresso per mezzo dell' altra; quando quella equazione si può scomporre in fattori del primo grado, si ha l' integrale completo fatto di un numero finito di termini; e quando non può farsi una tale scomposizione, l' integrale completo viene dato per mezzo delle serie le quali procedono secondo i differenziali di una funzione arbitraria.

E possono anco procedere secondo gl' integrali di una tale funzione. Ciò appunto succede quando nello sviluppare in serie le quantità e^{My}, $e^{M'y}$ si trovano le potenze negative dell' α, giacchè allora negl' integrali s' incontrano dei termini di questa forma $TCe^{ax} \cdot \alpha^{-1}$, $T'Ce^{ax} \cdot \alpha^{-2}$, ecc., i quali debbono essere $T\int dx \cdot \phi(x)$; $T'\int^2 dx^2 \cdot \phi(x)$, ecc., quando Ce^{ax} è $\phi(x)$.

§ 315. È sempre integrabile in termini finiti la equazione dell' ordine ennesimo

$$A\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)+B\left(\frac{d^n z}{dx^{n-1}\,dy}\right)+\ldots\ldots+P\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)=0.$$

Per integrarla faccio $z=Ce^{\alpha x+\beta y}$, ed allora l'equazione tra α e β sarà

$A\alpha^n+B\alpha^{n-1}\beta+\ldots\ldots+P\beta^n=0$, e di qui

$$A+B\frac{\beta}{\alpha}+C\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\ldots\ldots+P\frac{\beta^n}{\alpha^n}=0.$$

Siano b, b', b'' ecc. $b^{(n-1)}$ gli n valori del $\frac{\beta}{\alpha}$, ed avremo questi n valori della z, cioè

$z=Ce^{\alpha(x+by)}$; $z=C'e^{\alpha'(x+b'y)}$;

$z=C^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}\left(x+b^{(n-1)}y\right)}$,

dai quali si ricava l'integrale completo della proposta

$$z=\varphi(x+by)+\varphi'(x+b'y)+\ldots\ldots$$
$$+\varphi^{(n-1)}\left(x+b^{(n-1)}y\right).$$

Sia anco da integrarsi l' equazione

$$Az+B\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+D\left(\frac{d^4z}{dx^2dy^2}\right)+\ldots+P\left(\frac{d^{2n}z}{dx^n dy^n}\right)=0.$$

Facendo $z=Ce^{\alpha x+\beta y}$, avremo tra α e β quest' equazione algebratica

$A+B\alpha\beta+D\alpha^2\beta^2+\ldots\ldots+P\alpha^n\beta^n=0$,

la quale dà n valori per $\alpha\beta$: siano questi valori a', a'', a''' ecc. $a^{(n)}$, ed avremo

$$\beta = \frac{a'}{a},\ \beta = \frac{a''}{a},\ \beta = \frac{a'''}{a}, \ldots \beta = \frac{a^{(n)}}{a}:$$

sarà quindi

$$z = Ce^{ax + \frac{a'}{a}y} + C'e^{a'x + \frac{a''}{a'}y} + C''e^{a''x + \frac{a'''}{a''}y} + \text{ec.}$$

Ora riducendo in serie la quantità $e^{\frac{a'}{a}y}$, abbiamo

$$e^{\frac{a'}{a}y} = 1 + \frac{a'y}{a} + \frac{a'^2y^2}{2\cdot a^2} + \frac{a'^3y^3}{2\cdot 3\cdot a^3} + \text{ecc.};$$

dunque il primo termine dell' espressione della z sarà

$$Ce^{ax + \frac{a'}{a}y} = Ce^{ax} + a'y\cdot Ce^{ax}a^{-1}$$

$$+ \frac{a'^2y^2}{2}\cdot Ce^{ax}a^{-2} + \text{ecc., e perciò}$$

$$Ce^{ax + \frac{a'}{a}y} = \phi(x) + a'y \int dx\cdot \phi(x)$$

$$+ \frac{a'^2y^2}{2}\int^2 dx^2\cdot \phi(x) + \frac{a'^3y^3}{2\cdot 3}\int^3 dx^3\cdot \phi(x) + \text{ec.}$$

Egualmente ogni altro termine della z ci darà una serie simile, e s' avrà l' integrale fatto con un numero n di serie, ciascuna delle quali contiene una funzione arbitraria; e qui osserveremo che il numero delle funzioni arbitrarie è la metà dell' ordine dell' equazione differenziale; e generalmente il numero delle funzioni arbitrarie è eguale al numero dei valori di quella delle due indeterminate α, β, che noi determiniamo per mezzo dell' altra;

e per questo, onde avere nell' integrale quante più si possono funzioni arbitrarie, si prenderà il valore di quella indeterminata che ha il maggiore esponente.

§ 316. L' equazioni sin qui integrate avevano il secondo membro nullo. Se questo fosse stato $X + Y$, cioè l' aggregato di due funzioni, l' una della x, l' altra della y, l' equazioni avrebbero egualmente potuto integrarsi. È necessario allora porre

$z = Ce^{\alpha x + \beta y} + F(x) + F'(y)$, giacchè fatte le opportune sostituzioni nell' equazioni, si trova tra α e β la stessa equazione algebratica, e si hanno due equazioni differenziali ordinarie per determinare la funzione $F(x)$ della x, e la $F'(y)$ della y.

§ 317. Allorquando alcuni valori del β sono eguali, alcune delle serie rappresentanti e^{My}, $e^{M'y}$ ecc. hanno i medesimi coefficienti, e scema il numero delle funzioni arbitrarie che entrano nell' integrale: supponiamo di fatto che nell' equazione del (§ 313) $M = M$, i coefficienti allora T, T', T'' ecc. saranno gli stessi che T_1, T_1', T_1'' ecc., e perciò le due serie dell' integrale

$$T \quad \phi(x) + T' \quad \left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

$$T_1 \cdot \phi'(x) + T_1' \cdot \left(\frac{d\phi'(x)}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

si ridurranno ad una sola

$$T\{\phi(x) + \phi'(x)\} + T'\left\{\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + \left(\frac{d\phi'(x)}{dx}\right)\right\} + \text{ecc.}$$

L' aggregato di due funzioni arbitrarie non può far le veci e rappresentare altro che una sola funzione arbitraria; dunque cangiando la forma delle funzioni, cioè facendo $\phi(x) + \phi'(x) = \Psi(x)$ le due serie diverranno una sola

$$T\Psi(x) + T'\left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right) + T''\left(\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}\right) + \text{ecc.}$$

In questo caso l' integrale conterrà una sola funzione arbitraria.

Per far sì che l' integrale contenga lo stesso numero di funzioni, adopreremo un metodo analogo a quello di cui abbiamo fatto uso pei consimili casi dell' equazioni differenziali.

In una equazione lineare coi differenziali parziali dell' ordine n, sostituendo in vece della z e dei di lei differenziali parziali, la quantità $Ce^{\alpha x + \beta y}$, ed i differenziali parziali di questa, si avrà un' equazione algebratica tra α e β, la quale, ordinata secondo le potenze del β, sarà di questa forma

$$(1) \ldots H\beta^0 + H'\beta + H''\beta^2 \ldots\ldots + H^{(n)}\beta^n = 0.$$

Se ora si moltiplicano i termini di questa equazione per gli esponenti che vi ha il β, e si divide per β, avremo un' altra equazione

$$(2) \ldots H' + 2H''\beta + 3H'''\beta^2 + \ldots + nH^{(n)}\beta^{n-1} = 0;$$

ma le radici dell' equazione (1) sono i limiti di quelle della (2); dunque se l' equazione (1) ha due radici eguali, una di queste sarà nel tempo stesso radice della (2).

Moltiplichiamo per y l' equazione (1), ed aggiungendola alla (2) si avrà un' altra equazione (3)

$$(3) \ldots H\beta^0 y + H'(\beta y + 1) + H''(\beta^2 y + 2\beta) + \ldots$$

$+ H^{(n)}(\beta^n y + n\beta^{n-1}) = 0$; ed una di quelle radici eguali soddisfarà anco all' equazione (3).

Dunque qualunque funzione delle x, y e di uno di quei valori eguali del β, la quale, sostituita nella proposta in vece della z, la trasformi nella equazione (3), sarà un nuovo integrale della proposta medesima. Ora questo nuovo valore della z è

appunto $C'ye^{\alpha x + \beta y}$, ove C' rappresenta una costante arbitraria, come si potrebbe verificare; dunque $z = C'ye^{\alpha x + \beta y}$ sarà un altro integrale della proposta; se dunque il primo integrale $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$ era trasformato in $z = N\phi(x + by)$, questo nuovo sarà trasformato in $z = Ny\,\Psi(x + by)$; essendo Ψ una nuova funzione arbitraria, e quindi la somma di questi due integrali conterrà sempre due funzioni arbitrarie diverse.

Se poi $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$ era trasformato nella serie

$z = T\phi(x) + T'\left(\frac{d\phi}{dx}\right) +$ ecc., l' altro sarà rappresentato da questa stessa serie moltiplicata per y, e prendendo allora una diversa funzione arbitraria $\Psi(x)$ della x, avremo

$z = Ty \cdot \Psi(x) + T'\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) y +$ ecc.; e la somma di queste due serie conterrà sempre due funzioni arbitrarie diverse.

Siccome poi quando si hanno due valori del β dati per mezzo dell' α, eguali tra loro, se ne hanno *vice versa* due dell' α dati per mezzo del β, eguali parimente tra loro; perciò ordinando secondo le potenze dell' α l' equazione algebratica tra α e β, e facendo lo stesso raziocinio, si troverà che soddisfarà alla proposta anco $z = C\alpha e^{\alpha x + \beta y}$, pel che $z = Mx\,\Psi(x + by)$ sarà un altro integrale della proposta, se lo era $z = M\phi(x + by)$; e

$z = Tx \cdot \Psi(x) + T'x\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) +$ ecc. sarà un nuovo integrale, se lo era $z = T\phi(x) + T'\left(\frac{d\phi}{dx}\right) +$ ecc.

Non estendo queste dottrine al caso di tre e più radici eguali, perchè ciò non è difficile a chi avrà bene comprese le cose dette finora: e poi rammento anche qui, che il lettore potrà trovare per questo, come per gli altri rami del calcolo integrale, un maggior corpo di dottrina nel mio Corso di calcolo sublime.

§ 318. Prendiamo l'equazione tra quattro variabili

$$\left.\begin{array}{l} Az + B\left(\frac{dz}{dx}\right) + E\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + D\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \\ + E'\left(\frac{dz}{dy}\right) + F\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + G\left(\frac{d^2z}{dudy}\right) \\ + H\left(\frac{dz}{du}\right) + L\left(\frac{d^2z}{dxdu}\right) + M\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Per integrarla pongo $z = Ce^{\alpha x + \beta y + \gamma u}$ come al § 301, e fatte le opportune sostituzioni e riduzioni, ottengo tra le tre indeterminate α, β, γ quest'equazione

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + E\alpha^2 + D\beta^2 \\ + E'\beta + F\alpha\beta + G\beta\gamma \\ + H\gamma + L\alpha\gamma + M\gamma^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Se questa avrà il primo membro eguale al prodotto

$$(\beta - a'\alpha - b'\gamma - c')\,(\beta - a''\alpha - b''\gamma - c''),$$

allora avremo

$$z = Ce^{c'y} \cdot e^{\alpha(x + a'y) + \gamma(u + b'y)}$$
$$+ C'e^{c''y} \cdot e^{\alpha(x + a''y) + \gamma(u + b''y)};$$

e questa espressione la quale contiene sei costanti arbitrarie, perchè le α, γ del secondo termine si possono prendere diverse da quelle del primo, si baratterà (§ 301) in quest' altra

$$z = e^{c'y}\phi(x + a'y, u + b'y) + e^{c''y}\Psi(x + a''y, u + b''y),$$

ove con ϕ, Ψ indichiamo due funzioni arbitrarie delle quantità che stanno tra le parentesi.

Se poi l'equazione non fosse scomponibile in due fattori del primo grado, allora indicando con M, M' i due valori del β, i quali saranno funzioni irrazionali dell' α e del γ, avremo

$$z = Ce^{\alpha x + \gamma u} \cdot e^{My} + C'e^{\alpha x + \gamma u} \cdot e^{M'y}.$$

Se ora si vorranno introdurre le due funzioni arbitrarie, ridurremo la quantità e^{My} in una serie secondo le potenze dell' α e γ, e se supponiamo che un termine di questa serie sia $P\alpha^m\gamma^n$, essendo m, n numeri interi positivi qualunque, avremo nella espressione della z il termine $Pe^{\alpha x + \gamma u} \cdot \alpha^m\gamma^n$, il quale, facendo

$$e^{\alpha x + \gamma u} = \phi(x, u), \text{ è } P\left(\frac{d^{m+n}\phi(x, u)}{dx^m du^n}\right).$$

Se poi i numeri m ed n fossero tutti e due negativi, allora nell' espressione della z vi sarebbe il termine $Pe^{\alpha x + \gamma u} \cdot \frac{1}{\alpha^m\gamma^u}$, che, nella detta supposizione, diviene $P\int dx \int dx \ldots\ldots \int dx \int du \int \ldots\ldots \int \phi(x, u)\, du$, prendendo m segni sommatorj rispetto alla x, e n segni rispetto all' u; e se dei due numeri m, n uno è positivo, l'altro negativo, cioè se un termine della serie è $Pe^{\alpha x + \gamma u} \cdot \alpha^{-m}\gamma^n$, si potrà mettere nell'integrale in sua vece $P\int dx \int dx \int \ldots\ldots \int dx \left(\frac{d^n\phi}{du^n}\right)$, essendo m di numero i segni sommatorj.

L'altro termine $C'e^{\alpha x + \gamma u} \cdot e^{M'y}$ si svolgerà in un' altra serie, e nel modo stesso vi s' introdurrà la funzione arbitraria; e così anco in quest' ultimo caso nel quale quell' equazione non può scomporsi in due fattori lineari, si avrà l' integrale provveduto di due funzioni arbitrarie.

§ 319. Quando i coefficienti dell' equazione lineare sono funzioni di una variabile, si può cercare l' integrale per questa via. Io prendo un caso particolare, ma facil sarà applicare il metodo a qualunque altro caso.

Sia proposta l' equazione

$$-3x^2z + x^3\left(\frac{dz}{dx}\right) - 2x\left(\frac{dz}{dy}\right) + x^2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = a + x.$$

Faccio $z = ue^{\beta y} + z'$: con u, z' indico due funzioni della x da determinarsi, e con β una costante parimente indeterminata.

Ciò supposto, io ottengo

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\beta y}\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dz'}{dx}\right);$$

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = ue^{\beta y}\beta$; $\left(\frac{d^2z}{dydx}\right) = e^{\beta y}\beta \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$; e fatte le opportune sostituzioni e riduzioni, trovo

$$(1) \ldots - 3x^2u + x^3\left(\frac{du}{dx}\right) - 2x\beta u + x^2\beta\left(\frac{du}{dx}\right) = 0,$$

$$(2) \ldots - 3x^2z' + x^3\left(\frac{dz'}{dx}\right) = a + x.$$

Con la prima determineremo la funzione u, e con la seconda la z'.

Avremo pertanto $u = (x^3 + x^2\beta) \cdot C$, essendo C una costante arbitraria. Sarà dunque $z = C(x^3 + x^2\beta)e^{\beta y} + z'$,

ovvero $z = x^3 \cdot Ce^{\beta y} + x^2 \cdot Ce^{\beta y}\beta + z'$; e ponendo $\phi(y)$ in vece di $Ce^{\beta y}$, si avrà

$$z = x^3\phi(y) + x^2\left(\frac{d\phi}{dy}\right) + z'.$$

Se il valore dell'u non si potesse avere ordinato secondo le potenze del β che per mezzo di una serie, l'integrale conterrebbe allora una serie ordinata secondo i differenziali integrali di una funzione arbitraria.

§ 320. Passiamo adesso a vedere una forma generale d'equazioni a coefficienti variabili, funzioni delle due variabili x, y, le quali sono suscettive d'una integrazione completa. Noi tratteremo una equazione del secondo ordine, ma il metodo che useremo per questa, sarà adattabile ancora all'equazioni degli ordini superiori. Sia pertanto proposta l'equazione

$$\left.\begin{array}{l} Az + Bx\left(\frac{dz}{dx}\right) + Cx^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \\ \quad + B'y\left(\frac{dz}{dy}\right) + C'xy\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \\ \quad\quad + C''y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

nella quale A, B, C ecc., sono quantità costanti.

Facciamo $z = Ex^m y^n$, essendo E, m, n quantità costanti da determinarsi. Sostituendo il valore della z e dei suoi differenziali parziali, e dividendo per $Ex^m y^n$, avremo

$$\left.\begin{array}{l} A + Bm + Cm(m-1) \\ \quad + B'n + C'mn \\ \quad\quad + C''n(n-1) \end{array}\right\} = 0:$$

la costante E rimane indeterminata, e parimente rimane indeterminata una delle due costanti m, n, fra le quali vi è un' equazione algebratica del secondo grado.

Siano N, N' i due valori della m dati per mezzo della n, ed avremo per z queste due espressioni

$z = Ex^N y^n$, $z = E'x^{N'} y^n$.

Ora la proposta essendo lineare, soddisfarà ad essa anche la somma di quelle due espressioni, ed avremo $z = Ex^N y^n + E'x^{N'} y^n$, nella quale E, E' sono due costanti arbitrarie; la quantità n è anche arbitraria e può prendersi diversa in ciascun termine.

Anzi ciascuna delle quantità $Ex^N y^n$, ecc. può barattarsi in un' altra che contenga una funzione arbitraria. Ecco la regola generale: $z = \phi(E, a, x, y)$ soddisfà ad una equazione differenziale, si potrà in vece della costante E porre una qualunque funzione arbitraria dell' a, essendo a una quantità variabile la quale soddisfaccia a quest' equazione

$$\left(\frac{d\phi}{dE}\right)\left(\frac{dE}{da}\right) + \left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0.$$

§ 321. Supponiamo ora che $B' = B$; $C' = 2C$; $C' = C$; l' equazione da integrarsi diventerà

$$\left.\begin{array}{r} Az + \\ B\left\{x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} + \\ C\left\{x^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2xy\left(\frac{d^2z}{dydx}\right) + y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\} \end{array}\right\} = 0,$$

e l' equazione algebratica tra m ed n sarà

$A + B(m + n) + C\{m(m - 1) + 2nm + n(n - 1)\} = 0.$

Se quest' equazione risoluta ne' suoi due fattori è $z = x^h \cdot (x^g y)^n \cdot E + x^{h'} \cdot (x^{g'} y)^n \cdot E'$; in questo caso però le costanti E, E' possono supporsi funzioni di $\frac{x}{y}$. L' integrale allora contiene due funzioni arbitrarie: di fatto, fatta $E = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ e sostituiti i differenziali della z nell' equazione, si trova che i coefficienti dei differenziali dell' E si elidono da sè medesimi, e tutto sta come se la E fosse costante. Per convincersene, osserviamo che, fatta

$z = x^m y^n \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ e supposto

$$d\phi(\omega) = \phi'(\omega) \left\{ \left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy \right\},$$

$$d\phi'(\omega) = \phi''(\omega) \left\{ \left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy \right\} \text{ ecc.},$$

si ha (scrivendo ϕ in vece di $\phi\left(\frac{x}{y}\right)$, ecc.),

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = mx^{m-1} y^n \cdot \phi + x^m y^{n-1} \cdot \phi'$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = m(m-1) x^{m-2} y^n \cdot \phi$$
$$+ 2mx^{m-1} y^{n-1} \cdot \phi' + x^m y^{n-2} \cdot \phi'',$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = nx^m y^{n-1} \cdot \phi - x^{m+1} y^{n-2} \phi'$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = n(n-1) x^m y^{n-2} \cdot \phi - 2(n-1) x^{m+1} y^{n-3} \cdot \phi'$$
$$+ x^{m+2} y^{n-4} \cdot \phi'',$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = mnx^{m-1}y^{n-1} \cdot \phi - mx^m y^{n-2} \cdot \phi'$$

$$+ (n-1)\, x^m y^{n-2} \cdot \phi' - x^{m+1} y^{n-3} \cdot \phi''.$$

Se ora i valori di questi differenziali si sostituiscono nella proposta, avremo la stessa equazione come nel caso della E costante, giacchè i termini che vengono di più, tra loro stessi si distruggono; dunque l' integrale completo della proposta sarà

$$z = x^{h+gn} \cdot y^n \cdot \phi\left(\frac{x}{y}\right) + x^{h'+g'n} \cdot y^n \cdot \phi'\left(\frac{x}{y}\right),$$

essendo ϕ, ϕ' due funzioni arbitrarie diverse.

§ 322. Noi abbiamo supposto nullo il secondo membro dell' equazione integrata al § antecedente. Sia questo una funzione della x e della y, cioè $\Psi(x, y)$. Ponendo $\frac{x}{y} \cdot y$ in vece della x, essa diventerà una funzione di $\frac{x}{y}$ e della y, prenderà cioè la forma $F\left(\frac{x}{y}, y\right)$.

Per integrare allora l' equazione, si faccia $z = x^m y^n \phi\left(\frac{x}{y}\right) + Y$, essendo Y una funzione incognita della y, e sostituendo questo valore nella proposta, avremo, per determinare Y, quest' equazione $AY + By\left(\frac{dY}{dy}\right) + Cy^2\left(\frac{d^2Y}{dy^2}\right) = F\left(\frac{x}{y}, y\right)$: onde integrarla considereremo costante la quantità $\frac{x}{y}$ che trovasi nella F, poichè i differenziali di uesta quantità sostituiti nell' equazione proposta si

distruggono da sè medesimi; in questo modo trovato il valore della Y, lo aggiungeremo nell' integrale ottenuto nell' antecedente paragrafo.

Se i coefficienti A, B, C, ecc. fossero funzioni di $\frac{x}{y}$, gl' integrali avrebbero la stessa forma; poichè quantunque l' equazione che allora determina m, abbia i coefficienti variabili, e dia perciò m eguale ad una funzione di $\frac{x}{y}$, pure questo valore di m è come se fosse costante, giacchè i di lui differenziali moltiplicati pei coefficienti della proposta s' annullano da sè stessi.

Sarà facile persuadersene prendendo i differenziali di

$z = x^{f\left(\frac{x}{y}\right)} y^n \cdot \phi\left(\frac{x}{y}\right)$, ove la funzione $f\left(\frac{x}{y}\right)$ esprime il valore di m che è dato dall' equazione fra m ed n, e sostituendoli nella proposta.

§ 323. Ancora l' equazione

$$\left.\begin{aligned} Az + B(ax+by)\left(\frac{dz}{dx}\right) + C\,(ax+by)^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \\ + B'(ax+by)\left(\frac{dz}{dy}\right) + C'(ax+by)^2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \\ + C''(ax+by)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \end{aligned}\right\} = 0$$

è suscettiva di un integrale.

Sia $z = E(ax+by)^m$, e fatte le opportune sostituzioni e riduzioni, avremo

$$\left.\begin{array}{l} A + Bma + Cm\,(m-1)\,a^2 \\ \quad + B'mb + C'm\,(m-1)\,ab \\ \qquad + C''m\,(m-1)\,b^2 \end{array}\right\} = 0,$$

ovvero

$$A + (Ba + B'b)\,m + (Ca^2 + C'ab + C''b^2)\,m\,(m-1) = 0.$$

Con questa equazione determineremo m, ed avremo tanti valori particolari della m quanto è il grado di quell' equazione: ciascuno di quei valori particolari ci darà un valore della z, e la somma di tutti questi valori sarà il valore della z che soddisfarà alla proposta.

§ 324. Diciamo qualche cosa del caso nel quale sono date molte equazioni lineari coi differenziali parziali fra molte funzioni z, u, ecc. delle variabili x, y.

Si abbiano queste due equazioni coi coefficienti costanti

$$\left.\begin{array}{l} Az + B\left(\frac{dz}{dx}\right) + C\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ A'u + B'\left(\frac{du}{dx}\right) + C'\left(\frac{du}{dy}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} az + b\left(\frac{dz}{dx}\right) + c\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ a'u + b'\left(\frac{du}{dx}\right) + c'\left(\frac{du}{dy}\right) \end{array}\right\} = 0$$

tra le funzioni z, u.

Facciamo $z = e^{\alpha x + \beta y}$, $u = L \cdot e^{\alpha x + \beta y}$, essendo L, α, β costanti da determinarsi, e sostituendo e dividendo per $e^{\alpha x + \beta y}$, avremo

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\beta \\ L(A' + B'\alpha + C'\beta) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} L(a' + b'\alpha + c'\beta) \\ a + z\alpha + cb \end{array}\right\} = 0,$$

dalle quali elimineremo la L, e troveremo allora fra α e β un' equazione algebratica del secondo grado.

Sia $\beta = M$ una radice di quell' equazione la quale ci dia $L = N$: saranno M, N due funzioni conosciute dell' α, ed avremo

$z = e^{ax + My}$; $u = N \cdot e^{ax + My}$. Riduciamo in serie ordinate secondo le potenze dell' α le quantità e^{My}, Ne^{My}, e supponiamo

$$e^{My} = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 + \text{ecc.}$$

$$Ne^{My} = V + V'\alpha + V''\alpha^2 + V'''\alpha^3 + \text{ecc.};$$

avremo allora

$$z = Te^{ax} + T'e^{ax}\alpha + T''e^{ax}\alpha^2 + T'''e^{ax}\alpha^3 + \text{ecc.},$$

$$u = Ve^{ax} + V'e^{ax}\alpha + V''e^{ax}\alpha^2 + V'''e^{ax}\alpha^3 + \text{ecc.};$$

ed introducendo in vece di e^{ax} una funzione arbitraria, sarà

$$z = T\phi(x) + T'\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + T''\left(\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right) + \text{ecc.},$$

$$u = V\phi(x) + V'\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + V''\left(\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right) + \text{ecc.}$$

Questi valori di z, u soddisfanno all' equazioni proposte.

L' altra radice ci darebbe due simili valori della z e della u, e si potrebbero anche prendere le somme di queste con le ritrovate, onde averne in questa guisa i valori della z e della u con due funzioni arbitrarie. Si vede come dovremmo fare per l' equazioni degli ordini superiori.

§ 325. Talvolta il teorema di Taylor ci può dare gl' integrali espressi in serie. Di fatto, abbiasi da integrare l' equazione $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Indicando con $z_{x,y}$ la stessa z, è sempre

$$z_{x,y}=z_{o,y}+x\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\text{ecc.},$$

purchè si faccia $x=o$ a differenziazioni eseguite. Ora l'equazione proposta lascia indeterminata $z_{o,y}$ e $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, dunque in vece di $z_{o,y}$ e di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ prenderemo due funzioni arbitrarie $\phi(y)$, $\phi'(y)$ della sola y; avremo poi, quando $x=o$,

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\left(\frac{d\phi}{dy}\right);\ \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}\right)=$$

$$\left(\frac{d\phi'}{dy}\right);\ \left(\frac{d^4z}{dx^4}\right)=\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)=\left(\frac{d\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dy}\right)=\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right),\ \text{ecc.}$$

Dunque

$$z_{x,y}=\phi(y)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)+\text{ecc.}$$

$$+x\phi'(y)+\frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d\phi'}{dy}\right)+\frac{x^5}{2.3.4.5}\left(\frac{d^2\phi'}{dy^2}\right)+\text{ec.}$$

Nello stesso modo essendo

$$z_{x,y} = z_{x,0} + y\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \text{ecc.},$$

purchè si faccia $y=0$ a differenziazioni eseguite, si avrà

$$z_{x,y} = \phi(x) + y\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right) + \text{ecc.}$$

Adoperiamo il metodo del § 312, e fatta $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$, si ha $\alpha^2 = \beta$, quindi

$$(a) \ldots\ldots z = Ce^{\alpha x + \alpha^2 y};$$

$$(b) \ldots\ldots z = Ce^{\beta y + x\sqrt{\beta}} + C'e^{\beta y - x\sqrt{\beta}}.$$

Il valore (a) ci dà

$$z = Ce^{\alpha x}\left(1 + y\alpha^2 + \frac{y^2}{2}\alpha^4 + \frac{y^3}{2\cdot 3}\alpha^6 + \text{ecc.}\right), \text{ e quindi}$$

$$z = \phi(x) + y\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right) + \text{ecc. come sopra.}$$

L' altro valore (b), facendo $C = C'$, ci dà

$$z = Ce^{\beta y}\{e^{x\sqrt{\beta}} + e^{-x\sqrt{\beta}}\}$$

$$= 2Ce^{\beta y}\left\{1 + \frac{x^2}{2}\beta + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}\beta^2 + \text{ecc.}\right\}, \text{ e quindi}$$

$$z = \phi(y) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d\phi}{dy}\right) + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right) + \text{ecc.}$$

E facendo $C = C''\sqrt{\beta}$, $C' = -C''\sqrt{\beta}$, si ha

$$z = C''e^{\beta y}\{\sqrt{\beta}\cdot e^{x\sqrt{\beta}} - \sqrt{\beta}\cdot e^{-x\sqrt{\beta}}\}, \text{ e quindi}$$

$$z = x\phi'(y) + \frac{x^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d\phi'}{dy}\right) + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{d^2\phi'}{dy^2}\right) + \text{ecc.}$$

La somma di questi due ultimi valori della z ci dà l' integrale trovato col teorema di TAYLOR.

CAPO XVII.

Integrazione dell' equazioni coi differenziali parziali degli ordini superiori.

§ 326. Primieramente osservo che qualunque sia l' ordine dell' equazione tra x, y, u, ecc., z nella quale si risguarda z come funzione di tutte le altre variabili, se non vi si trovano che i differenziali parziali della z rispetto ad una variabile, se ne potrà a dirittura aver l' integrale. Di fatto, supporremo costanti tutte le altre variabili, eccetto quella rispetto a cui vi sono differenziali; allora risguardando la proposta come un' equazione differenziale tra due variabili, la integreremo, ed in vece delle costanti arbitrarie prenderemo altrettante funzioni arbitrarie delle variabili che si presero per costanti.

A questo caso si riduce quest' equazione, per esempio $y^2+x^2-\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)=0$. Facciasi $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\omega$, ed avremo $y^2+x^2-\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)=0$, il cui integrale, nella supposta y costante, è

$$\omega=\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{y^2x^2}{2}+\frac{x^4}{3\cdot4}+xf(y)+f'(y),$$ essendo fy, $f'y$ due diverse funzioni arbitrarie della y. Si avrà poi

$$z=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{x^4y}{3\cdot4}+x\int dyf(y)+\int dyf'(y)+f''(x),$$

ovvero

$$z=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{x^4y}{3\cdot4}+xFy+F'y+F''x,$$ indicando

con F, F', F'' tre funzioni arbitrarie delle variabili che vi sono unite.

Per l' equazione $xyu - \left(\frac{d^3z}{dxdydu}\right) = 0$, ponendo $\left(\frac{d^2z}{dydu}\right) = \omega$, si ha $xyu - \left(\frac{d\omega}{dx}\right) = 0$, e quindi

$\omega = \frac{x^2yu}{2} + f(y, u)$; dunque

$\left(\frac{d^2z}{dydu}\right) = \frac{x^2yu}{2} + f(y, u)$. Faccio $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \theta$, ed ho

$\left(\frac{d\theta}{du}\right) = \frac{x^2yu}{2} + f(y, u)$, e quindi

$\theta = \frac{x^2yu^2}{2 \cdot 2} + \int du f(y, u) + f'(x, y)$; dunque

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{x^2yu^2}{2 \cdot 2} + \int du f(y, u) + f'(x; y)$.

L' integrale in fine di quest' ultima equazione sarà

$$z = \frac{x^2y^2u^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \int dy \int du \cdot f(y, u) + \int dy \cdot f'(x, y) + f''(x, u),$$ ovvero

$$z = \frac{x^2y^2u^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} + F(y, u) + F'(x, y) + F''(x, u),$$

indicando con F, F', F'' tre funzioni arbitrarie delle variabili poste tra le parentesi.

Questi due esempj mostrano in quali casi possono farsi così le integrazioni.

§ 327. Veniamo adesso all' integrazione dell' equazioni coi differenziali parziali dell' ordine secondo fra tre variabili x, y, z. Facciamo

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right),\ q = \left(\frac{dz}{dy}\right),\ r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ s = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),$$

$t=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$; supponiamo di più che nell' equazione da integrarsi le quantità r, s, t non vi siano elevate al di là della potestà lineare: sia dunque proposta l' equazione

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+L=0$, nella quale M, N, L siano funzioni date delle x, y, z, p, q.

Essendo p, q due funzioni ancora esse delle x, y, e supponendo che y sia funzione della x, senza però che nulla si stabilisca sopra la di loro relazione, si avrà $\left(\frac{dp}{dx}\right)=r+s\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dx}\right)=s+t\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e da queste equazioni ricaveremo

$$r=\left(\frac{dp}{dx}\right)-s\left(\frac{dy}{dx}\right),\quad t=\left\{\left(\frac{dq}{dx}\right)-s\right\}:\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Si osservi che essendo p funzione della x, y, noi abbiamo indicato con $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ il differenziale totale del p preso per rispetto alla x quando y è risguardato come funzione della x: questo segno $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ avrebbe potuto contrassegnarsi onde distinguersi dal caso in cui esso dee significare il differenziale parziale relativamente a x solamente: si dica lo stesso del q. Sostituiamo questi valori nella proposta, ed essa diverrà

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)+N\left(\frac{dq}{dx}\right)+L\left(\frac{dy}{dx}\right)-$$
$$s\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-M\left(\frac{dy}{dx}\right)+N\right\}=0.$$

Se ora moltiplichiamo per dx^2, e poniamo dp, dq, dy in vece di $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$, $\left(\frac{dq}{dx}\right) dx$, $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, avremo

$$(A) \ldots\ldots dpdy + Ndqdx + Ldxdy - s\{dy^2 - Mdxdy + Ndx^2\} = 0.$$

Questa equazione sarà soddisfatta se avremo

$$(E) \ldots\ldots \begin{cases} dpdy + Ndqdx + Ldxdy = 0, \\ dy^2 - Mdxdy + Ndx^2 = 0. \end{cases}$$

Ora la seconda di queste due equazioni si scompone in queste due $dy - \alpha dx = 0$, $dy - \beta dx = 0$, essendo α, β. le radici dell' equazione del secondo grado $\alpha^2 - M\alpha + N = 0$: avremo dunque questi due sistemi di equazioni

$$\begin{cases} dpdy + Ndqdx + Ldxdy = 0, \\ dy - \alpha dx = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} dpdy + Ndqdx + Ldxdy = 0, \\ dy - \beta dx = 0, \end{cases}$$

ovvero (ponendo nelle prime equazioni il valore di y ricavato dalle seconde)

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} \alpha dp + Ndq + L\alpha dx = 0, \\ dy - \alpha dx = 0; \end{cases}$$

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \beta dp + Ndq + L\beta dx = 0, \\ dy - \beta dx = 0, \end{cases}$$

ciascuno dei quali soddisfà all' equazione (A).

§ 328. Supponiamo che in qualche modo si ricavino dal sistema (1) due equazioni $V = a$, $U = b$, le quali ne siano gl'integrali completi, essendo a, b costanti arbitrarie, o possano farne le veci, e sarà

allora $U = \phi(V)$ un integrale primo completo della equazione proposta: di fatto, la proposta è soddisfatta quando lo è l' equazione (A) cui essa conduce: la equazione (A) è soddisfatta quando lo sono l' equazioni (1): queste sono soddisfatte da $V = a$, $U = b$, ovvero $dV = 0$, $dU = 0$: dunque la proposta sarà soddisfatta da queste medesime equazioni.

Ora l' equazione $U = \phi(V)$ dandoci

$dU - \left(\frac{d\phi}{dV}\right) dV = 0$, e dovendo essere vera senza

che vi abbia che fare la forma della funzione, ci somministra appunto $dU = 0$, $dV = 0$: essa dunque soddisfarà alla proposta, e ne sarà per conseguenza l' integrale primo completo.

Chiamasi *integrale primo* di un' equazione a differenze parziali del secondo ordine un' equazione del primo ordine, da cui quella dipenda: dicesi poi *completo* se contiene una funzione arbitraria.

Nella medesima maniera, se l' altro sistema (2) ci darà $U' = b'$, $V' = a'$, sarà $U' = \Psi(V')$ un altro integrale primo completo.

§ 329. Rendiamo con esempj più chiara questa teorica. Supponiamo che M, N siano quantità costanti, e che L sia una funzione delle x, y. Prendiamo il primo sistema delle due equazioni

$adp + Ndq + Ladx = 0$, $dy - adx = 0$, ed avremo subito dalla seconda $y - ax = a$, quindi $y = a + ax$: la prima poi ci darà $ap + Nq + a\int Ldx = b$, ove L sarà soltanto una funzione della x, tosto che in vece della y avrem posto il respettivo valore. Sarà dunque $ap + Nq + a\int Ldx = \phi(y - ax)$ un integrale primo completo della proposta: nel modo stesso potrebbe trovarsi l' altro integrale primo.

Eseguita l' integrazione, sia $\int Ldx = V$, e riponendo nel V in vece dell' a il suo valore, tornerà V ad essere una funzione della x, y, e l' integrale

primo sarà $ap + Nq + aV = \phi(y - ax)$; l' integrale completo poi di quest' equazione a differenze parziali del primo ordine sarà l' integrale finito completo della proposta.

Per ottenerlo cercheremo (§ 228) gl' integrali di queste due equazioni differenziali ordinarie

$$dy - \frac{N}{a}\,dx = 0\,,\quad dz + Vdx = \frac{1}{a}\,dx\phi(y - ax).$$

La prima ci dà $y - \frac{N}{a}x = a'$; ma $N = a\beta$, dunque $y = a' + \beta x$. Questo valore della y sostituito nella seconda, il V diverrà una sola funzione della x, e risguardando $\frac{1}{a}$ come compreso entro la funzione ϕ, l' integrale di quella seconda equazione sarà

$z + \int Vdx - \int dx \cdot \phi\{a' + (\beta - a)x\} = b'$, ovvero

$z + \int Vdx - F(y - ax) = b'$; e siccome a', b' sono due costanti arbitrarie, perciò l' integrale finito e completo della proposta sarà

$z + \int Vdx - F(y - ax) = \Psi(y - \beta x)$; ove

$F(y - ax)$, $\Psi(y - \beta x)$ rappresentano le due funzioni arbitrarie.

Supponiamo che eseguita che sia l'integrazione, abbiasi $\int Vdx = V'$, sarà V' una sola funzione della x: se però riponiamo in esso in vece dell' a' il suo valore $y - \frac{N}{a}x$, tornerà allora V ad essere una funzione della x e della y.

Sia, per esempio, $L = x^2 + xy$, si avrà

$$\int Ldx = \int\{x^2 + x(a + ax)\}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + \frac{ax^3}{3},$$

quindi

$$V = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2}(y - ax) = \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{a}{2}\right) + \frac{x^2 y}{2}.$$

$$\int V dx = \int \left\{ \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{x^2}{2}(a' + \beta x) \right\} dx$$

$$= \frac{x^4}{3\cdot 4}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{x^3 a'}{2\cdot 3} + \frac{\beta x^4}{2\cdot 4},$$

e quindi fatto $a' = y - \beta x$

$V = \frac{x^4}{3\cdot 4}\left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{x^3 y}{2\cdot 3}$: sarà pertanto

$$z + \frac{x^4}{3\cdot 4}\left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{x^3 y}{2\cdot 3} - F(y - \alpha x)$$

$= \Psi_{\backslash}(y - \beta x)$ l' integrale completo dell' equazione

$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + x^2 + xy = 0$, ove

M, N sono quantità costanti.

§ 330. Per integrare l'equazione $q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$, ne faremo il paragone con la formola generale: avremo allora $M = -\frac{2p}{q}$, $N = \frac{p^2}{q^2}$, $L = 0$, e le due equazioni (E) saranno

$$dpdy + \frac{p^2}{q^2} dqdx = 0, \; dy^2 + \frac{2p}{q} dxdy + \frac{p^2}{q^2} dx^2 = 0.$$

Il primo membro della seconda è un quadrato perfetto, e perciò le due equazioni in cui essa si scomporrà, saranno eguali, e quei due sistemi (1), (2) si ridurranno ad un solo

$dpdy + \frac{p^2}{q^2} dpdx = 0$, $qdy + pdx = 0$, ovvero ponendo nella prima il valore della y ricavato dalla seconda $qdp - pdq = 0$, $pdx + qdy = 0$: la prima di queste equazioni ci dà $\frac{p}{q} = b$, e la seconda, essendo

$pdx + qdy = dz$, ci dà $z = a$; quindi un integrale primo sarà $p = qF(z)$.

Per avere l'altro integrale primo, all' equazione $qdp - pdq = 0$ moltiplicata per $\frac{x}{q^2}$ aggiungiamo la seconda $pdx + qdy = 0$ moltiplicata per $\frac{1}{q}$, ed avremo $\frac{x(qdp - pdq)}{q^2} + \frac{pdx}{q} + dy = 0$, il cui integrale è $\frac{xp}{q} + y = b$: avremo per conseguenza $\frac{xp}{q} + y = f(z)$, che sarà l'altro integrale primo della proposta.

L' integrale finito poi si può subito ottenere eliminando $\frac{p}{q}$ per mezzo dei due integrali primi, e si ha $xF(z) + y = f(z)$, che è il cercato integrale completo, perchè $F(z)$, $f(z)$ rappresentano due diverse funzioni arbitrarie di z.

§ 331. Sia proposta l' equazione $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \frac{4}{x+y}\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, ed il di lei integrale dipenderà da questi due sistemi d' equazioni

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} dp - dq + \frac{4p}{x+y}dx = 0, \\ dy - dx = 0; \end{cases}$$

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} dp + dq + \frac{4p}{x+y}dx = 0, \\ dy + dx = 0, \end{cases}$$

da ciascuno dei quali dovrebbesi ricavare un integrale primo.

La seconda equazione del sistema (1) ci dà $y - x = a$, quindi $y = a + x$, e perciò la prima diverrà $dp - dq + \frac{4p}{2x + a} dx = 0$, ed a causa di $dy - dx = 0$ ella si potrà così trasformare

$$dp - dq + \frac{2}{2x + a} \left\{ pdx - pdx + q\,(dy - dx) \right\} = 0,$$

ovvero

$$dp - dq + \frac{2}{2x + a}\,(pdx - qdx + dz) = 0,$$

il cui integrale è $(p - q)(2x + a) + 2z = b$; l' integrale primo completo sarà $(p - q)(2x + a) + 2z = F(a)$, ove è da sostituire in vece dell' a il suo valore: si ha allora $(p - q)(x + y) + 2z = F(y - x)$.

La seconda equazione dell' altro sistema ci dà $y + x = a'$, la quale cangia la prima in

$dp + dq + \frac{4p}{a'} dx = 0$, che non potendo integrarsi, dimostra che non si può ottenere un altro integrale primo.

Per avere l' integrale completo cercato, trovisi l' integrale dell' equazione del primo ordine

$$p - q + \frac{2z}{x + y} - \frac{F(x - y)}{x + y} = 0.$$

Secondo la regola data al § 302, si avrà il sistema di queste due equazioni

$$dy + dx = 0, \quad dz - \left\{ \frac{F(x - y) - 2z}{x + y} \right\} dx = 0,$$

dagl'integrali delle quali dipende l'integrale cercato.

La prima ha per integrale $y + x = a$, e questo cangia la seconda in $dz + \frac{2z}{a} dx = \frac{F(2x + a)}{a} dx$, il cui integrale si ricava da ciò che è detto al § 321, ed è $z = e^{-\frac{2x}{a}} \left\{ C + \int e^{\frac{2x}{a}} \cdot \frac{F(2x + a)}{a} dx \right\}$, ove C rappresenta una costante arbitraria.

L'integrale adunque completo della nostra equazione sarà $z = e^{-\frac{2x}{y+x}} \left\{ \phi(x+y) + \int e^{\frac{2x}{a}} \cdot \frac{F(2x-a)}{a} dx \right\}$, facendovi $a = x + y$ ad integrazione eseguita.

§ 332. Prendiamo l'equazione generale lineare del second' ordine

$$(A) \ldots\ldots \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$
$$+ L\left(\frac{dz}{dx}\right) + P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Qz + T = 0,$$

nella quale M, N, L, P, Q, T sono funzioni della x, y.

Noi potremo ridurre quest' equazione più semplice, introducendo opportunamente due altre variabili ω, θ in vece delle x, y.

Supponiamo dunque che z sia funzione delle due variabili ω, θ, essendo ciascuna di queste una funzione da determinarsi delle x, y: avremo allora

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$$

$$+\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left\{\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\right\}+\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$$

$$+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right)+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dxdy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2+2\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$$

$$+\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dy^2}\right).$$

Facciamo le respettive sostituzioni nella proposta, ed essa prenderà la forma

$$R\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)+M'\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)+N'\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)+L'\left(\frac{dz}{d\omega}\right)$$

$$+P'\left(\frac{dz}{d\theta}\right)+Qz+T=0\text{, essendo}$$

$$R=\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2+M\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2,$$

$$M'=2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+M\left\{\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\right\}$$

$$+2N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right),$$

$$N'=\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2+M\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+N\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2,$$

$$L' = \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) + L\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + P\left(\frac{d\omega}{dy}\right),$$

$$P' = \left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2\theta}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2\theta}{dy^2}\right) + L\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + P\left(\frac{d\theta}{dy}\right).$$

Ora essendo ω, θ due funzioni indeterminate della x, y, facciamole tali che annullino i coefficienti R, N', ed allora l' equazione si ridurrà ad aver questa forma più semplice assai della proposta (A),

$$(E) \ldots \left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + A\left(\frac{dz}{d\omega}\right) + B\left(\frac{dz}{d\theta}\right) + Cz + V = 0,$$

nella quale le variabili sono ω, θ, z, ed i coefficienti A, B, C sono funzioni delle ω, θ; di fatto, le condizioni che abbiamo apposte alla determinazione del ω e del θ, ci danno

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + M\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + M\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right) + N\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 = 0,$$

dalle quali si ricava

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = \left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left\{-\frac{1}{2}M \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}M^2 - N\right)}\right\},$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left\{-\frac{1}{2}M \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}M^2 - N\right)}\right\}:$$

queste sono due equazioni coi differenziali parziali del primo ordine: integrandole dunque (§ 302), troveremo per ω e θ una infinità di valori, tra i quali sceglier potremo i più semplici; per mezzo di essi poi troveremo i valori della x, y espressi per mezzo delle variabili ω e θ, che sostituiti nei coefficienti della proposta, li cangeranno in altrettante funzioni del ω e del θ.

§ 333. La trasformazione per mezzo della quale l'equazione (A) è ridotta ad avere una forma assai più semplice (E), non può farsi in due casi, che io mi accingo a decifrare.

Riprendiamo l'equazione

$$(A) \ldots \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + L\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

$$+ P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Qz + T = 0.$$

Se fosse $M=0$, $N=0$, essa ridurrebbesi alla

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + L\left(\frac{dz}{dx}\right) + P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Qz + T = 0,$$

e si avrebbe $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)=0$, pel che ω, θ

dovrebbero essere funzioni della sola y, e quindi non potremmo determinare x per mezzo di ω e di θ.

Il secondo caso succede quando $N = \frac{1}{4}M^2$; poichè abbiamo

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = -\frac{1}{2}M\left(\frac{d\omega}{dy}\right), \text{ e } \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = -\frac{1}{2}M\left(\frac{d\theta}{dy}\right),$$

ed ω allora viene ad essere funzione di θ.

Così le due variabili ω, θ non sono più indipendenti l'una dall'altra, e siccome x, y lo sono, perciò non può ciascuna delle x, y essere date per mezzo delle ω, θ.

Ecco come ci regoleremo in tal caso: lasciando stare y, supponiamo che z sia una funzione di y e di ω, essendo anche ω una funzione della x, y, data da quest' equazione

$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = -\frac{1}{2}M\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$: si avrà allora x per mezzo della ω e della y, e quindi

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right),\ \left(\frac{dz}{dy}\right)=\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)':$$

la quantità $\left(\frac{dz}{dy}\right)'$ c. indica il coefficiente del dy nel differenziale della z considerata come funzione di ω e di y: avremo poi

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\left(\frac{d^2z}{d\omega dy}\right)'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$
$$+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)'+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)$$
$$+2\left(\frac{d^2z}{d\omega dy}\right)'\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$$: ora se noi sostituiamo questi valori nell' equazione (A), e vi facciamo $N=\frac{1}{4}M^2$, $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)=-\frac{1}{2}M\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$, si vedrà ch' ella si può ridurre a quest' altra forma più semplice

$$(E')\ldots\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)'+A'\left(\frac{dz}{dy}\right)'+B'\left(\frac{dz}{d\omega}\right)+C'z+V'=0,$$

di maniera che l' equazione (A) sarà sempre suscettiva di avere una di queste due forme

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+A\left(\frac{dz}{dx}\right)+B\left(\frac{dz}{dy}\right)+Cz+V=0,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+a\left(\frac{dz}{dx}\right)+b\left(\frac{dz}{dy}\right)+cz+V=0.$$

§ 334. Consideriamo pertanto l' equazione

$$(E)\ldots\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+A\left(\frac{dz}{dx}\right)+B\left(\frac{dz}{dy}\right)+Cz+V=0.$$

Per integrarla io faccio $z=e^{\alpha}\beta$, indicando con α, β due funzioni della x, y da determinarsi. Ciò posto, la suddetta equazione (E) si cangerà nella

$$(F)\ldots\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+\left\{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A\right\}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)\\ \qquad+\left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B\right\}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)\\ \left\{\left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right)+\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\right.\\ \qquad\left.+B\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+C\right\}\beta\end{array}\right\}=-Ve^{-\alpha}:$$

per determinare α poniamo

$$(1)\ldots\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B=0,$$ e per determinare β,

$$(2)\ldots\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+\left\{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A\right\}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=-Ve^{-\alpha};$$

bisognerà allora che queste due equazioni soddisfacciano alla terza

$$(3)\ldots\left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right)+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+A\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+C=0.$$

L' equazione (1) ci dà subito

$\alpha = -\int B dx + \phi(y)$, e sostituendo questo valore dell' α nell' equazione (3), debbe questa essere soddisfatta, pel che si ha $C = AB + \left(\frac{dB}{dy}\right)$.

In quest' ultima equazione è contenuta la relazione che regnar dee tra i coefficienti della proposta, onde abbiasi per integrale $z = e^{\alpha}\beta$.

Per soddisfare all' equazione (F) potremmo porre anche

$$(1)' \ldots \left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + A = 0,$$

$$(2)' \ldots \left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + B\right\}\left(\frac{d\beta}{dy}\right) = -Ve^{-\alpha},$$

ed allora il valore di α, dalla prima ottenuto, avrebbe dovuto rendere identica l' equazione

$$(3)' \ldots \left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + A\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + B\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + C = 0,$$ ciò che succede se

$C = AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)$: l' equazione dunque ($E$) è integrabile in questi due casi: quando, cioè

$C = AB + \left(\frac{dB}{dy}\right)$, e quando $C = AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)$:

l' integrale poi ne è $z = e^{\alpha}\beta$, essendo α, β date dall' equazioni (1), (2) nel primo caso, e dalle (1)', (2)' nell' altro.

Sono dunque integrabili queste due equazioni

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz}{dx}\right) + B\left(\frac{dz}{dy}\right) +$$
$$\left\{AB + \left(\frac{dB}{dy}\right)\right\} z + V = 0,$$
$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz}{dx}\right) + B\left(\frac{dz}{dy}\right) +$$
$$\left\{AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)\right\} z + V = 0.$$

L' equazioni (2), (2)' sono facili ad integrarsi: di fatto, per la (2), facendo $\left(\frac{d\beta}{dx}\right) = u$, si ha $\left(\frac{du}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + A\right\} u = - Ve^{-\alpha}$, equazione del primo ordine di cui l' integrale è dato al (§ 231); trovato u, si ha subito $\beta = \int u dx + \phi(y)$.

Il simile si dica dell' equazione (2)'.

§ 335. Per farne un esempio, sia proposta l' equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \frac{1}{x-y}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{1}{x-y}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{2}{(x-y)^2} z = 0:$$

facendo $C = \frac{2}{(x-y)^2}$, $A = -\frac{1}{x-y} = B$, si ha appunto $C = AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)$; dunque essa è integrabile, ed il suo integrale è $z = e^{\alpha}\beta$, quando α, β si determinino per mezzo di queste equazioni

$$\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) - \frac{1}{x-y} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+\left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)-\frac{1}{x-y}\right\}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=0.$$

La prima di queste dà $\alpha=-l(x-y)+l\,cost$; e siccome la costante può essere una funzione della x, perciò si avrà $\alpha=l\frac{fx}{x-y}$, e quindi $e^{\alpha}=\frac{fx}{x-y}$ essendo fx funzione arbitraria della x.

Ad integrare l' altra equazione facciamo $\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=u$, e si avrà

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left\{\frac{f'x}{fx}-\frac{2}{x-y}\right\}u=0,\ \text{ove}\ f'x=\left(\frac{d\cdot fx}{dx}\right);$$

e quindi $u=\frac{(x-y)^2\Psi(y)}{fx}$ essendo $\Psi(y)$ una funzione arbitraria della y. Trovato u, si avrà β, e sarà

$$\beta=\int u dy=\int\frac{(x-y)^2\Psi(y)}{fx}dy=\frac{1}{fx}\int(x-y)^2\Psi(y)dy;$$

avremo pertanto

$$\beta=\frac{1}{fx}\left\{\int(x-y)^2\Psi(y)\,dy+F(x)\right\},\ \text{e quindi}$$

$$z=e^{\alpha}\beta=\frac{1}{x-y}\cdot\int(x-y)^2\Psi(y)\,dy+\frac{1}{x-y}F(x),$$

essendo $F(x)$ una funzione arbitraria della x, e $\Psi(y)$ della y. Se si facesse $\Psi(y)=0$, si avrebbe per z il valore particolare $\frac{1}{x-y}\cdot F(x)$.

§ 336. Supponiamo ora che nell' equazione $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+A\left(\frac{dz}{dx}\right)+B\left(\frac{dz}{dy}\right)+Cz+V=0$ non sia

$$+\left\{\left(\frac{d\frac{B}{M}}{dy}\right)+\frac{AB}{M}\right\}z'+z'+\left(\frac{d\frac{V}{M}}{dy}\right)+A\frac{V}{M}=0,$$

ovvero moltiplicando tutto per M,

$$\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)+\left\{A-\frac{1}{M}\left(\frac{dM}{dy}\right)\right\}\left(\frac{dz'}{dx}\right)+B\left(\frac{dz'}{dy}\right)$$

$$+\left\{M\left(\frac{d\frac{B}{M}}{dy}\right)+AB+M\right\}z'+M\left(\frac{d\frac{V}{M}}{dy}\right)+AV=0,$$

nella quale indicando con A' il coefficiente di $\left(\frac{dz'}{dx}\right)$, con C' quello di z', e con V' la quantità indipendente da z', si otterrà

$$(E')\ldots\ldots\left(\frac{d^2z'}{dxdx}\right)+A'\left(\frac{dz'}{dx}\right)+B\left(\frac{dz'}{dy}\right)+C'z'+V'=0;$$

così l' integrale dell' equazione (E) dipende da quello della (E'), giacchè trovata z', si ricava z dall' integrazione dell' equazione $z'=\left(\frac{dz}{dy}\right)+Az$: il valore della z si può anche avere dall' equazione, qui sopra trovata,

$$\left(\frac{dz'}{dx}\right)+Bz'+Mz+V=0,$$ che ci dà

$$z=-\frac{1}{M}\left\{V+Bz'+\left(\frac{dz'}{dx}\right)\right\}.$$

Quando dunque, non essendo integrabile l' equazione (E), lo fosse la (E'), dall' integrale di questa seconda si ricaverebbe quello della prima.

L' equazione (E') è integrabile nei due casi $C'=A'B+\left(\frac{dB}{dy}\right)$, $C'=A'B+\left(\frac{dA'}{dx}\right)$; dunque anche

in questi casi sarà integrabile la proposta.

Facendo $z' = \left(\frac{dz}{dx}\right) + Bz$, s'avrebbe potuto dedurre dall' equazione (E) l' equazione

$$\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \left\{B - \frac{1}{M}\left(\frac{dM}{dx}\right)\right\}\left(\frac{dz'}{dy}\right)$$
$$\left\{M\left(\frac{d\frac{A}{M}}{dx}\right) + AB + M\right\}z' + M\left(\frac{d\frac{V}{M}}{dx}\right) + BV = 0,$$

ovvero

$$(F')\ldots\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz'}{dx}\right) + B'\left(\frac{dz'}{dy}\right) + C'z' + V' = 0,$$

essendo $M = C - \left(\frac{dB}{dy}\right) - AB.$

Dall'integrale dell'equazione (F') dipende quello della (E), e perciò questa sarà ancora integrabile nei due casi $C' = AB' + \left(\frac{dB'}{dy}\right)$, $C = AB' + \left(\frac{dA}{dx}\right)$.

Se nè pure i contrassegni che dichiarano integrabile l' equazione

$$(E')\ldots\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + A'\left(\frac{dz'}{dx}\right) + B\left(\frac{dz'}{dy}\right) + C'z' + V' = 0$$

sono soddisfatti, noi la trasformeremo in un' altra

$$(E'')\ldots\left(\frac{d^2z''}{dxdy}\right) + A''\left(\frac{dz''}{dx}\right) + B\left(\frac{dz''}{dy}\right) + C''z'' + V'' = 0,$$

nella quale z'', A'', C'', V'' sono formati di z', A', C', V come questi qui di z, A, C, V.

Se poi l'equazione (E'') sarà integrabile, lo sarà anche la (E'), ed in conseguenza la (E); e così via via.

Si veda una Memoria del signor Laplace negli Atti dell' Accademia delle Scienze, 1773.

§ 337. Per farne un esempio, sia l' equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\frac{2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)=0.$$

Fattone il paragone con l' equazione (A) del § 337, si ha

$$M=0,\ N=-1,\ L=-\frac{2}{x},\ Q=0,\ T=0,\ P=0;$$

e volendola trasformare in un' altra tra le variabili ω, θ, si hanno queste due equazioni per determinare le due nuove variabili, cioè,

$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2=\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2=\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2$, dalle quali si ricava

$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)-\left(\frac{d\omega}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{d\theta}{dy}\right)=0$, cui si sodisfà con $\omega=y+x$, $\theta=y-x$.

L' integrale dunque della proposta si riduce a quello d' una equazione di questa forma

$\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)+A\left(\frac{dz}{d\omega}\right)+B\left(\frac{dz}{d\theta}\right)+Cz+V=0$ tra due nuove variabili ω, θ, le quali sono date per mezzo delle x, y.

Abbiansi sott' occhio le denominazioni del citato paragrafo, e vedremo che

$A=\frac{L'}{M'}$, $B=\frac{P'}{M'}$, $C=\frac{Q}{M'}$, $V=\frac{T}{M'}$; $M'=-2+0-2=-4$, $L'=-\frac{2}{x}$, $P'=\frac{2}{x}$, e quindi

$A=\frac{1}{2x}$, $B=-\frac{1}{2x}$, $C=0$, $V=0$: la trasformata sarà dunque

$$(e) \ldots \left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + \frac{1}{\omega-\theta}\left(\frac{dz}{d\omega}\right) - \frac{1}{\omega-\theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = 0,$$

nella quale z è funzione delle variabili ω, θ.

Paragoniamo ora quest' ultima equazione (e) con la (E) del § 334, ed avremo

$$\omega = x, \ \theta = y, \ A = \frac{1}{\omega-\theta}, \ B = -\frac{1}{\omega-\theta}, \ C = 0, \ V = 0;$$

quell' equazione poi sarà integrabile se avrà luogo una di queste due condizioni

$C = AB + \left(\frac{dB}{d\theta}\right)$, $C = AB + \left(\frac{dA}{d\omega}\right)$: ora non avendo luogo alcuna di esse, come potremmo vedere con la sostituzione dei respettivi valori di A, B, C, concluderemo che l' equazione

$$(e) \ldots \left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + \frac{1}{\omega-\theta}\left(\frac{dz}{d\omega}\right) - \frac{1}{\omega-\theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = 0$$

non è integrabile facendo $z = e^{\alpha}\beta$.

§ 338. Per questo incominciamo le trasformazioni di cui si parla al (§ 336), e seguendo quanto vi si dice, quest' equazione si trasformerà in un' altra

$$(e') \ldots \left(\frac{d^2z'}{d\omega d\theta}\right) + A'\left(\frac{dz'}{d\omega}\right) + B\left(\frac{dz'}{d\theta}\right) + C'z' + V' = 0,$$

ove sarà

$$z' = \left(\frac{dz}{d\theta}\right) + \frac{1}{\omega-\theta}z; \quad A' = A - \frac{1}{M}\left(\frac{dM}{d\theta}\right);$$

$$C' = M\left(\frac{d\frac{B}{M}}{d\theta}\right) + AB + M; \quad M = C - \left(\frac{dA}{d\omega}\right) - AB,$$

e quindi sostituendo i valori di C, A, B, e facendo le indicate differenziazioni, avremo

$$M = \frac{2}{(\omega-\theta)^2},\ A' = -\frac{1}{\omega-\theta},\ B = -\frac{1}{\omega-\theta},$$

$$C' = \frac{2}{(\omega-\theta)^2},\ V' = 0$$: l' equazione dunque cui è in questa guisa ridotta la (e), sarà

$$(e') \ldots \left(\frac{d^2z'}{d\omega d\theta}\right) - \frac{1}{\omega-\theta}\cdot\left(\frac{dz'}{d\omega}\right) - \frac{1}{\omega-\theta}\cdot\left(\frac{dz'}{d\theta}\right)$$

$$+ \frac{2}{(\omega-\theta)^2}\cdot z' = 0.$$

Quest' equazione è quella stessa che presa abbiamo al (§ 325), e per la quale abbiamo ottenuto (cangiate le variabili x, y in ω, θ)

$$z' = \frac{1}{\omega-\theta}\int(\omega-\theta)^2\Psi(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\omega-\theta}\cdot F(\omega),$$

facendosi l' integrazione col supporre ω costante.

Trovato z', si ha z dalla formola dello stesso (§ 336.);

$$z = -\frac{1}{M}\left\{V + Bz' + \left(\frac{dz'}{dx}\right)\right\},$$ e per noi

$$= -\frac{1}{M}\left\{V + Bz' + \left(\frac{dz'}{d\omega}\right)\right\}$$: sarà dunque

$$z = -\frac{(\omega-\theta)^2}{2}\left\{-\frac{1}{(\omega-\theta)^2}\int(\omega-\theta)^2\Psi(\theta)\,d\theta - \frac{1}{(\omega-\theta)^2}\cdot F(\omega) - \frac{1}{(\omega-\theta)^2}\int(\omega-\theta)^2\Psi(\theta)\,d\theta + \frac{2}{\omega-\theta}\int(\omega-\theta)\Psi(\theta)\,d\theta - \frac{1}{(\omega-\theta)^2}\cdot F(\omega) + \frac{1}{\omega-\theta}\cdot\left(\frac{dF}{d\omega}\right)\right\}$$

$$z=\int(\omega-\theta)^2\Psi(\theta)d\theta+F(\omega)-(\omega-\theta)\int(\omega-\theta)\,\Psi(\theta)\,d\theta-\frac{(\omega-\theta)}{2}\cdot\left(\frac{dF}{d\omega}\right).$$

Questo valore della z è l'integrale completo dell'equazione (e), ed in conseguenza della proposta

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\frac{2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

quando in esso, ad integrazioni compite, si faccia $\omega=x+y$, $\theta=y-x$.

Se noi facciamo $\Psi_{,}(\theta)=\int d\theta\,\Psi(\theta)$, $\Psi_{,,}(\theta)=\int d\theta\,\Psi_{,}(\theta)$, $\Psi_{,,,}(\theta)=\int d\theta\,\Psi_{,,}(\theta)$, l'espressione della z si ridurrà anche a questa più semplice

$$z=(\omega-\theta)\,\Psi_{,,}(\theta)+2\Psi_{,,,}(\theta)+F(\omega)-\frac{\omega-\theta}{2}\cdot\left(\frac{dF}{d\omega}\right),$$

ovvero fatto $\left(\frac{dF}{d\omega}\right)=F'(\omega)$,

$$z=2x\Psi_{,,}(y-x)+2\Psi_{,,,}(y-x)+F(y+x)-xF'(y+x).$$

§ 339. Gl' integrali completi dell' equazioni differenziali parziali contengono alcune funzioni arbitrarie, la cui determinazione debbe attingersi dalle condizioni dei problemi. Ecco come ci regoleremo per ottenerla.

Sia $P=\phi\,(Q)$ l'integrale di una equazione differenziale parziale del primo ordine, nel quale $\phi\,(Q)$ rappresenti la funzione arbitraria; P, Q siano due funzioni date per mezzo delle x, y, z. Supponiamo ora che le condizioni del problema richiedano che quando $y=\alpha_x$ funzione data x, debba anche essere $z=\beta_x$ altra funzione data della x, si cerca come determinare ϕ in modo che questa condizione sia adempita.

Per questo nelle quantità P e Q sostituiscansi i valori dati di y e di z, ed esse diverranno allora due funzioni cognite della x; rappresentiamole con X', X; bisognerà che l' equazione $X' = \phi\,(X)$ sia identica, la qual cosa dovrà ottenersi con una opportuna determinazione della forma della funzione ϕ.

Per questo poniamo $X = t$, e cavando da quest' equazione il valore della x dato per mezzo del t, e sostituendolo in X', questo divenga T; avremo allora $T = \phi\,(t)$, e così T sarà la forma che aver debbe la funzione incognita $\phi\,(t)$ del t. Dee dunque $\phi\,(Q)$ esser fatto del Q, come $\phi\,(t)$ lo è fatto del t, cioè come T è fatto del t.

Per esempio, avendo trovato al (§ 303) che l' integrale dell' equazione $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) + z = 0$ è $zx = \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$, determiniamo la forma della funzione in tal guisa che, fatto $y = ax^2$, abbiasi $z = bx$: avremo allora questa equazione, $bx^2 = \Psi\,(ax)$, la quale debb' essere identica. Fatto $ax = t$, si ha $bx^2 = \frac{bt^2}{a^2}$; dunque $\frac{bt^2}{a^2} = \Psi\,(t)$, ed in conseguenza $\Psi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{b}{a^2}\left(\frac{y}{x}\right)^2$: sarà in fine $zx = \frac{b}{a^2}\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

CAPO XVIII.

Dottrine delle soluzioni particolari.

§ 340. L' integrale completo di una equazione $V = 0$, tra le variabili x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, contiene sempre una costante arbitraria. Questo integrale sia rappresentato

con $\phi(x, y, a) = 0$, o semplicemente da $\phi = 0$, ove a indichi quella costante. Allorchè si danno dei valori particolari all' a, si hanno altrettanti integrali particolari di quella equazione differenziale $V = 0$; così potendo dare ad a infiniti valori, s' avranno infinite relazioni particolari che soddisfaranno alla proposta. Per quanto però tutte queste relazioni possano essere diverse, pure esse dipendono da una supposizione comune, cioè che i valori particolari dell' a, da cui risultano, siano costanti.

Ora se si facesse a variabile o funzione di x e di y, ma nello stesso tempo questa funzione fosse tale che nel differenziare $\phi = 0$, i termini che la variazione dell' a introduce, da sè medesimi si annullassero, allora il risultamento dell' eliminazione dell' a fra le due equazioni $\phi = 0$, $d\phi = 0$, sarebbe la stessa equazione $V = 0$, come se a fosse stata costante.

Sostituendo all' a una tal funzione entro $\phi = 0$, s' avrà una nuova relazione fra le variabili che soddisfarà all' equazione differenziale $V = 0$, e che perciò sarà ancora essa un di lei integrale. Questa nuova relazione di variabili, o questo nuovo integrale sarà diverso dagli altri, in quanto che quelli dipendono dal dare all' a valori costanti, e questo dal dare all' a un valore variabile. A sì fatta relazione si dà il nome di *soluzione particolare*.

La condizione dalla quale dipendono le soluzioni particolari, ci dà il modo di ritrovarle se esse vi sono; di fatto, differenziando l' equazione $\phi(x, y, a) = 0$, supponendo a variabile, avremo

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\phi}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\phi}{da}\right) \left\{ \left(\frac{da}{dx}\right) dx + \left(\frac{da}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx \right\} = 0,$$

ovvero più semplicemente

$\left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\phi}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\phi}{da}\right) da = 0$; la quale se a è tale che $\left(\frac{d\phi}{da}\right) da$ s' annulli da sè medesima, diviene $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \left(\frac{d\phi}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, ch' è il differenziale di $\phi = 0$, come se a fosse stata costante. Con questo differenziale e coll' equazione $\phi = 0$, eliminando a, s' ottiene la proposta $V = 0$.

L' equazione che abbiamo per determinare a è dunque $\left(\frac{d\phi}{da}\right) da = 0$, la quale si scompone nelle due $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$, $da = 0$.

Ora tutt' i valori dell' a che soddisfaranno all' una o all' altra di queste equazioni, ci daranno, sostituiti entro $\phi(x, y, a) = 0$, alcune relazioni tra x ed y che saranno tante equazioni integrali della proposta $V = 0$. All' equazione $da = 0$ soddisfà qualunque valore si prenda per a, purchè sia questo indipendente da x ed y, o costante riguardo ad esse; così essa ci dà l' integrale completo o gl' integrali particolari. Il primo membro dell' altra equazione $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$ è evidentemente una funzione conosciuta della x, y e dell' a; s' avranno dunque da questa equazione uno o più valori dell' a, espressi per mezzo della x ed y; e ciascuno di questi valori sostituito in $\phi(x, y, a) = 0$, ci darà una nuova relazione tra x, y, ch' è un nuovo integrale della proposta; queste relazioni sono le soluzioni particolari di $V = 0$.

Per esempio, l'equazione differenziale

$$y - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

ha per integrale completo $y^2 - 2ax + a^2 = 0$; essa risulta dall' eliminazione dell' a per mezzo di questo integrale, e del differenziale $2y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2a = 0$.

Se ora facciamo $\phi = y^2 - 2ax + a^2$, avremo $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = -2x + 2a = 0$, da cui si ricava $a = x$; e questo sarà il valore variabile da darsi all' a, il quale, sostituito nell' integrale completo $y^2 - 2ax + a^2 = 0$, ci somministra la soluzione particolare $y = x$.

§ 341. Ma non tutt' i valori della costante a ricavati da $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$ danno soluzioni particolari; bisogna che quest' equazione non dia per a un valore costante o una tal funzione della x e della y, che divenga costante mercè l'equazione $\phi(x, y, a) = 0$; o che in fine sostituito questo valore dell' a nell' integrale, non lo riduca tale, quale lo ridurrebbe qualche valore costante che si attribuisse all' a.

Se di una certa equazione differenziale l' integrale fosse $\phi = (x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2ay) + (x^2 - b)a^2 = 0$, in cui a rappresentasse la costante arbitraria, si avrebbe allora

$\left(\frac{d\phi}{da}\right) = -2y(x^2 + y^2 - b) + 2(x^2 - b)a = 0$, e quindi $a = \frac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b}$. Questo valore sostituito nell' integrale ci dà $\frac{y^4(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b} = 0$, e perciò $x^2 + y^2 - b = 0$ esser dovrebbe la soluzione particolare; siccome però in virtù di essa il valore dell' a

diventa nullo, così essa non è che un integrale particolare, il quale risulta dal fare eguale a zero la costante arbitraria contenuta nell'integrale completo.

§ 342. Con $\Psi \left\{ (x, y \left(\frac{dy}{dx}\right), a \right\} = 0$ rappresentiamo uno dei due integrali primi di una equazione differenziale del second' ordine $V = 0$, nel quale a sia la costante arbitraria. Si sa che $V = 0$ risultar debbe dall' eliminazione della costante a per mezzo dell' equazione $\Psi = 0$ e del suo differenziale. Se diamo all' a un valore variabile, che però soddisfaccia all' equazione $\left(\frac{d\Psi}{da}\right) = 0$, nulla si cangerà in quella eliminazione, e tutto starà come se a fosse costante. Ora questo valore dell' a (cui disfaranno le stesse eccezioni dette al § antecedente) sostituito nell' integrale primo, ci darà una certa relazione tra le variabili x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, alla quale si dà il nome di *soluzione particolare* della equazione differenziale del second' ordine. Si dica lo stesso per le soluzioni particolari degli ordini più alti.

Siano $P = 0$, $Q = 0$ i due integrali primi di una equazione differenziale del second' ordine $V = 0$. Ciascuno contiene una costante arbitraria diversa, e sia a la costante contenuta in $P = 0$, e b quella in $Q = 0$: da ognuno di essi si ricava il medesimo integrale finito completo, e questo sia $\phi(x, y, a, b) = 0$.

Se per mezzo dell' integrale primo $P = 0$ si cerca la soluzione particolare, ella si avrà eliminando a mercè queste due equazioni $P = 0$, $\left(\frac{dP}{da}\right) = 0$: sia $R = 0$ il risultamento di questa eliminazione, e per conseguenza quella soluzione particolare; se poi facciamo uso dell' altro integrale primo $Q = 0$, l'eliminazione del b tra le due equazioni $Q = 0$, $\left(\frac{dQ}{db}\right) = 0$

ci darà un' altra soluzione particolare $S = 0$. Ora le due soluzioni particolari $R = 0$, $S = 0$, per quanto siano esse ricavate da integrali primi diversi, sono però eguali tra di loro.

Di fatto, se rappresentiamo con $\phi(x, y, a, b) = 0$ l' integrale finito della $V = 0$, e con

$\phi' \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) a, b \right\} = 0$ il differenziale di quell' integrale, si avrà un integrale primo $P = 0$ eliminando b per mezzo delle due equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, e se ne avrà l' altro $Q = 0$ eliminando a mercè le stesse equazioni; onde aver poi le due soluzioni particolari, converrà eliminare a dall' equazione $P = 0$ per mezzo di essa medesima e del suo differenziale relativo ad a, e converrà eliminare b dalla $Q = 0$ mercè di essa e del suo differenziale relativo alla b.

Ora risguardiamo nell' equazione

$\phi' \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a, b \right\} = 0$ la quantità b qual funzione delle x, y, a determinate col mezzo dell' equazione $\phi(x, y, a, b) = 0$, e la sua equazione differenziale presa rispetto all' a sarà

$\left(\frac{d\phi'}{da}\right) + \left(\frac{db}{da}\right)\left(\frac{d\phi'}{db}\right) = 0$: nella medesima ipotesi, differenziando l' equazione $\phi = 0$, si avrà

$$\left(\frac{d\phi}{da}\right) + \left(\frac{db}{da}\right)\left(\frac{d\phi}{db}\right) = 0.$$

Eliminiamo $\left(\frac{db}{da}\right)$ per mezzo di queste due ultime equazioni, ed otterremo l' altra

$\left(\frac{d\phi'}{da}\right) \cdot \left(\frac{d\phi}{db}\right) - \left(\frac{d\phi'}{db}\right) \cdot \left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$, la quale combinata con le due equazioni

$$\phi(x, y, a, b) = 0 ; \phi'\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a, b\right\} = 0,$$

ed eliminate in virtù di esse le due costanti, ci darà la soluzione particolare, la quale è somministrata dall' integrale primo completo con la costante *a*.

Nello stesso modo risguardando *a* come una funzione del *b* nella equazione

$\phi'\left\{x, y, \left(\frac{dy}{da}\right), a, b\right\} = 0$, si avrà l' equazione

differenziale relativa alla *b*,

$\left(\frac{d\phi'}{db}\right) + \left(\frac{da}{db}\right)\left(\frac{d\phi'}{da}\right) = 0$; ed il valore del $\left(\frac{da}{db}\right)$

dipenderà dall' equazione differenziale

$\left(\frac{d\phi}{db}\right) + \left(\frac{da}{db}\right)\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$. Ora l' eliminazione del

$\left(\frac{da}{db}\right)$ tra queste due ultime equazioni ci darà medesimamente $\left(\frac{d\phi'}{da}\right)\left(\frac{d\phi}{db}\right) - \left(\frac{d\phi'}{db}\right)\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$.

L' altra soluzione particolare dunque dipendente dall' integrale primo completo con la costante *b*, sarà il risultamento dell' eliminazione delle due costanti *a*, *b* mercè le tre equazioni

$$\phi(x, y, a, b) = 0,$$

$$\phi'\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a, b\right\} = 0,$$

$\left(\frac{d\phi'}{da}\right)\left(\frac{d\phi}{db}\right) - \left(\frac{d\phi'}{db}\right)\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$, e sarà in conseguenza la medesima cosa della già ritrovata, come annunzia il teorema.

$$y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\left\{4x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2\right\}^2}{16(1+x^2)} = 0,$$

e tale sarà la soluzione particolare somministrata dall' integrale $P = 0$.

Medesimamente differenziando relativamente alla b l' equazione $Q = 0$, si avrà

$$\frac{x}{2} + \frac{2\left\{b - \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}}{x^2} + 2b = 0, \text{ e quindi}$$

$$b = \frac{4\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^3}{4(1+x^2)}, \text{ la cui sostituzione nella } Q = 0$$

ci conduce all' equazione

$$y - \frac{x}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\left\{4\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^3\right\}^2}{16x^2(1+x^2)} = 0,$$

ch' è l' altra soluzione particolare dataci dall' integrale $Q = 0$.

Queste due soluzioni particolari però sono in sostanza la medesima, poichè ciascuna di esse si riduce all' equazione

$$(1+x^2)y - \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x^4}{16} = 0;$$

e questa è la soluzione particolare dell' equazione del secondo ordine proposta.

§ 344. Se noi, facendo $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $r = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, ... $v = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, $w = \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)$, supponiamo essere $F(x, y, p, q, \ldots\ldots v, w) = 0$

un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo}, e $f(x, y, p, q, \ldots\ldots v, a) = 0$ il suo integrale primo completo, indicandone con a la costante arbitraria, è manifesto che preso da quest' ultima equazione il valore dell' a, che sia
$a = \phi(x, y, p, \ldots\ldots v)$, e sostituito di nuovo in essa equazione medesima, si avrà l' equazione
$f\{x, y, p, q, \ldots\ldots v, \phi(x, y, p, q, \ldots\ldots v)\} = 0$,
che necessariamente sarà identica. Ora essendo y, p, q, ecc. funzioni della x dipendenti tra loro ma incognite, quell' equazione sarà identica anco rispetto a ciascuna di esse, vale a dire, tutt' i termini che contengono il più alto differenziale v, si distruggeranno da sè medesimi: quei che contengono il differenziale immediatamente inferiore, si distruggeranno nel modo stesso, e così dicasi degli altri.

Dunque tutt' i differenziali di quell' equazione identica, presi relativamente alle x, y, p, q, ecc., formeranno anche altrettante equazioni identiche: avremo dunque

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{da}{dx}\right)\left(\frac{df}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{da}{dy}\right)\left(\frac{df}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dp}\right) + \left(\frac{da}{dp}\right)\left(\frac{df}{da}\right) = 0, \text{ ecc.},$$

quando vi si ponga in vece dell' a il suo valore ϕ.

Supposta questa sostituzione, noi ricaviamo

$$\left(\frac{da}{dx}\right) = \left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\left(\frac{df}{dx}\right) : \left(\frac{df}{da}\right),$$

$$\left(\frac{da}{dy}\right) = \left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\left(\frac{df}{dy}\right) : \left(\frac{df}{da}\right),$$

$\left(\frac{da}{dp}\right)=\left(\frac{d\phi}{dp}\right)=-\left(\frac{df}{dp}\right):\left(\frac{df}{da}\right)$, ecc.;

e siccome la funzione $\left(\frac{df}{da}\right)$ debb'essere nulla quando si ha la soluzione particolare, perciò in questo medesimo caso i valori delle funzioni $\left(\frac{da}{dx}\right)$, $\left(\frac{da}{dy}\right)$, $\left(\frac{da}{dp}\right)$, ecc., sino al $\left(\frac{da}{dv}\right)$ inclusivamente, dovranno essere infiniti ciascuno.

E di qui si ricava un altro metodo per trovare le soluzioni particolari, il quale ha il vantaggio che può applicarsi al caso in cui l'integrale abbia questa forma $\phi(x, y, p, q, \ldots. v)=a$: allora l'altro metodo non era buono; di fatto, avendosi $f(x, y, p, \ldots. v, a)=\phi(x, y, p, \ldots. v)-a=0$, ne seguiva $\left(\frac{df}{da}\right)=-1$, che non significa cosa alcuna.

Per esempio, prendiamo l'equazione $x^2-2ay-a^2-b=0$: si ricava da essa $a=-y+\sqrt{(x^2+y^2-b)}$; quindi $\phi(x, y)=a=-y+\sqrt{(x^2+y^2-b)}$,

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=\left(\frac{da}{dx}\right)=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}},$$

$$\left(\frac{d\phi}{dy}\right)=\left(\frac{da}{dy}\right)=-1+\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}};$$ queste due ultime funzioni saranno infinite se $x^2+y^2-b=0$: dunque questa equazione ci darà la soluzione particolare. E qui bisogna fare un' osservazione. Egli è vero che la soluzione particolare rende sempre $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)$, ecc. infiniti, ma non è però vera la

proposizione inversa, che cioè, ogni relazione la quale rende infinite quelle quantità, dia una soluzione particolare. Perchè ciò succedesse, bisognerebbe che quella relazione non rendesse la funzione ϕ eguale ad una costante, giacchè in questo caso si avrebbe un integrale particolare e non una soluzione.

§ 345. Cercando la soluzione particolare della equazione del second' ordine

$$y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}^2$$
$$- \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0,$$ abbiam trovato

$$(F) \ldots\ldots y\,(1+x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(\frac{x^3}{2} + x\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

che risoluta relativamente a $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ci dà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{2x + x^3}{4} - \frac{\sqrt{(1+x^2)} \cdot \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}}{4} = 0.$$

Dividiamola per $\frac{1}{8}\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}$, ed avremo

$$\frac{8\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4x + 2x^3}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}} = 2\sqrt{(1 + x^2)},$$ ovvero

$$\frac{8dy + 4xdx + 2x^3dx}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}} = 2dx\sqrt{(1 + x^2)},$$ il cui integrale completo è

$$(E) \ldots\ldots \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} = x\sqrt{(1 + x^2)} + l\{\sqrt{(1 + x^2)} + x\} + K,$$

essendo K la costante arbitraria.

Quest' equazione è ben diversa dall' integrale completo $y - \frac{a}{2} x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$: essa però soddisfà alla proposta equazione differenziale del secondo ordine, poichè soddisfà alla soluzione particolare del primo ordine, per cui è soddisfatta la proposta medesima.

La soluzione particolare (F) essendo una equazione differenziale del primo ordine, può avere ancora essa una soluzione particolare. Per trovarla, quando vi sia, adopriamo il secondo metodo. Avendo dunque

$K = \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} - x\sqrt{(1 + x^2)} + l\{\sqrt{(1 + x^2)} - x\}$,

si trova subito

$\left(\frac{dK}{dy}\right) = \frac{8}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}}$; e questa quantità dovendo essere infinita, ci dà $16y + 4x^2 + x^4 = 0$, che sarà la soluzione particolare dell' equazione (F). Tai soluzioni particolari possono chiamarsi *soluzioni particolari doppie*, essendo esse nate da un' altra soluzione particolare.

Questa relazione $16y + 4x^2 + x^4 = 0$, la quale soddisfà all' equazione (F), non soddisfà però alla proposta del second' ordine: noi l' avremmo potuta dedurre immediatamente dall' integrale completo

$y - \frac{a}{2} x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$, determinando a e b

per mezzo delle due equazioni differenziali relativamente alle stesse a, b: in questa guisa avremmo

$\frac{1}{2} x^2 + 2a = 0$, $x + 2b = 0$, e quindi

$a = -\frac{x^2}{4}$, $b = -\frac{x}{2}$; questi valori sostituiti nell' integrale ci danno $y + \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4} = 0$ come sopra.

§ 346. Quando è dato l' integrale completo, abbiamo veduto come può trovarsi la soluzione particolare se vi è; vediamo adesso come può aversi questa relazione tra le variabili, quando quello non è conosciuto.

Sia $F(x, y, a) = 0$ l' integrale completo di un' equazione differenziale del primo ordine.

Questa equazione differenziale sarà il risultamento dell' eliminazione della costante a tra le due equazioni $F = 0$,

$dF = \left\{ \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} dx = 0$; e la soluzione particolare sarà il risultamento dell' eliminazione della stessa a tra le due equazioni $F = 0$, $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$.

Supponiamo che dall' equazione $dF = 0$ si ricavi il valore dell' a dato per mezzo delle x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e sia $a = \phi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\}$; si sostituisca questo valore nella $F = 0$, e si avrà $F(x, y, \phi) = 0$ per rappresentare la differenziale della $F = 0$.

Prendiamo ora il differenziale di quest' equazione $F(x, y, \phi) = 0$, ed avremo

$$\left\{ \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} dx + \left(\frac{dF}{d\phi}\right) d\phi = 0,$$

la quale si riduce a $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) d\phi = 0$, essendo la quantità $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)$ da sè medesima nulla, dal momento che avremo in essa sostituito, in vece dell' a, il suo valore ricavato da

$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$

Il differenziale dunque dell' equazione $F(x, y, \phi) = 0$ sarà semplicemente $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) d\phi = 0$, il quale si decompone in queste due equazioni $d\phi = 0$, $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) = 0$.

La prima $d\phi = 0$ è una equazione del secondo ordine, e ci dà il valore del $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ fatto delle x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$; l' integrale di essa è $\phi = a$: in questa guisa $\phi = a$, $F(x, y, \phi) = 0$ sono due integrali primi della stessa equazione differenziale del secondo ordine $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) d\phi = 0$; e per conseguenza eliminando tra essi $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si avrà (§ 358) l' integrale della medesima $F(x, y, \phi) = 0$ completo con la costante arbitraria a. Questa eliminazione si ottiene con eliminare la quantità ϕ, e si ha subito $F(x, y, a) = 0$, che è l' equazione donde partimmo.

Se chiamiamo ad esame l' altra equazione $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) = 0$, si vede ch' essa soddisfà alla medesima equazione del secondo ordine: e siccome essa contiene x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ma non vi si trova la costante arbitraria, così può risguardarsi come un integrale primo della stessa equazione, ma non completo. Eliminando perciò $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ tra le due equazioni $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) = 0$,

$F(x, y, \phi) = 0$, si avrà una relazione tra x ed y, la quale soddisfarà alla $F(x, y, \phi) = 0$, e non potrà esser considerata per integrale completo, mancandovi la costante arbitraria.

Questa relazione è anzi la stessa soluzione particolare della $F(x, y, \phi) = 0$: di fatto, per eliminare tra le due equazioni $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) = 0$, $F(x, y, \phi) = 0$ la quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, basterà eliminare ϕ che la contiene; ora il risultamento dell' eliminazione del ϕ tra quelle due equazioni è lo stesso che il risultamento dell' eliminazione dell' a tra queste altre $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, $F(x, y, a) = 0$; dunque il risultamento dell' eliminazione del ϕ, ovvero del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ci darà la soluzione particolare.

§ 347. Ciò posto abbiasi un' equazione differenziale qualunque del primo ordine $fdx = 0$, ove f ovvero $f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$ rappresenti una qualunque funzione delle x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. L' equazione $f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$ risulta dall'eliminazione della costante a per mezzo dell' integrale completo $F(x, y, a) = 0$ e del suo differenziale $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$: ora il risultamento di questa eliminazione essendo $F(x, y, \phi) = 0$, le due equazioni $f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$, $F(x, y, \phi) = 0$

o saranno identiche, o differiranno per causa di un qualche fattor comune che si ritrovi in una di esse: sia dunque M il fattore che, moltiplicando $F(x, y, \phi) = 0$, la renda identica con l'altra, ed avremo

$$f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = MF(x, y, \phi); \text{ quindi}$$

$$F(x, y, \phi) = \frac{f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}}{M}.$$

Differenziamo quest' ultima equazione, e si avrà $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) d\phi = \frac{df}{M} - \frac{dM \cdot f}{M^2}$, da cui ricavasi

$df = M \cdot \left(\frac{dF}{d\phi}\right) d\phi + \frac{dM \cdot f}{M}$, che è la forma generale del differenziale di $f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$, cioè del primo membro dell' equazione proposta.

Di qui si ricava che data un' equazione del primo ordine $f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$, si potrà soddisfare al di lei differenziale, indipendentemente dal valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, per mezzo dell'equazione $\left(\frac{dF}{d\phi}\right) = 0$ combinata con la proposta $f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$; di modo che queste due equazioni potranno risguardarsi come due integrali del primo ordine della medesima equazione $df = 0$: basterà in conseguenza eliminare $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ tra l' equazioni

$$\left(\frac{dF}{d\phi}\right) = 0, \; f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0, \text{ ovvero}$$

$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0$, $MF(x, y, \varphi)=0$, onde avere l' integrale della proposta che, secondo quanto abbiam detto, sarà una di lei soluzione particolare.

§ 348. Ora differenziando la funzione $f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$,

si ha $\left\{\text{pongo } p \text{ per } \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$

$$\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{df}{dp}\right)+\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)\right\}dx;$$

dunque paragonando questo differenziale con la forma generale sopra trovata, si avrà l' equazione

$$\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{df}{dp}\right)+\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)\right\}dx$$
$$=M\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)d\varphi+\frac{dM\cdot f}{M} \text{ che sarà identica.}$$

Si riduce nullo il secondo membro, indipendentemente dal valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, col fare $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0$, $f=0$: si riduce nullo il primo membro, indipendentemente dal valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, col fare $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$, $\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)=0$; dunque quelle due prime equazioni danno necessariamente le seconde; dunque si avrà una soluzione particolare eliminando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ per mezzo dell' equazione proposta da queste due equazioni $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$, $\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$.

Se i due risultamenti danno la medesima equazione tra x, y, sarà questa una soluzione particolare: in caso diverso la proposta non avrà soluzioni.

Se le due equazioni

$$\left(\frac{df}{dp}\right)=0,\ \left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)=0$$

avranno un fattore comune N, questo, eguagliato a zero, ci darà l'equazione $N=0$, la quale, combinata con la proposta, somministrerà la soluzione particolare.

Sia, per esempio, l'equazione

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(x^2-b)-2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)-x^2=0;$$

differenziamola, ed avremo

$$2\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)(x^2-b)-xy\right\}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-2\left\{y\left(\frac{dy}{dx}\right)+x\right\}=0,$$

che ci dà $\left(\frac{dy}{dx}\right)(x^2-b)-xy=0$, $y\left(\frac{dy}{dx}\right)+x=0$.

Ricavando da ciascuna di queste equazioni il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, avremo $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{xy}{x^2-b}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{x}{y}$, valori che, sostituiti nella proposta, ci daranno due equazioni le quali si riducono alla $x^2+y^2-b=0$, che sarà perciò la soluzione particolare.

§ 349. Risulta da quanto abbiamo detto qui sopra, che data un'equazione differenziale $f\left\{x,y,\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}=0$, per averne la soluzione particolare, se vi è, la differenzieremo, ed ottenendo un'equazione della forma $P\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+Q=0$, ne ricaveremo il valore di

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ch' è $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{Q}{P}$: eguagliato questo valore a $\frac{o}{o}$, ci somministrerà due equazioni $Q = o$, $P = o$, ciascuna delle quali combinata colla proposta $f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = o$, eliminandovi $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ci darà una relazione tra x, y. Se queste due relazioni saranno in sostanza la stessa, la proposta avrà una soluzione particolare, e sarà essa espressa da tal relazione. Se ciò non succederà, la proposta nòn avrà soluzione.

Quando le due equazioni $P = o$, $Q = o$ avessero un fattor comune, combinato questo con la proposta, ci darebbe la soluzione particolare.

Per esempio, l' equazione

$$\left\{x\left(\frac{dy}{dx}\right) - y\right\} \cdot \left\{x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2y\right\} + x^3 = o \text{ ci dà}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3x^2}{x\left\{2x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3y\right\}} \quad \frac{o}{o}\text{; quindi}$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3x^2 = o,$$

$$2x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3y = o.$$

Da queste equazioni eliminando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ con l'ajuto della proposta, ricavar se ne debbe la soluzione particolare.

La seconda di queste due equazioni ci dà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{3y}{2x}$, che, sostituito nella prima, dà questa

relazione $\frac{3y^2}{4x} - 3x^2 = 0$. Lo stesso valore, sostituito nella proposta, porta l' equazione $-\frac{y^2}{4} + x^3 = 0$.

Queste due ultime equazioni si riducono alla medesima $y^2 - 4x^3 = 0$, che è perciò la soluzione particolare cercata.

§ 350. Riprendiamo il valore del $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$: sia $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{Q}{P}$, sia $f = 0$ l'equazione proposta, $s = 0$ la soluzione particolare. Le due equazioni $f = 0$, $s = 0$ ci danno $Q = 0$, $P = 0$, e queste quattro equazioni sussistono tutte nello stesso tempo: dunque sussisteranno anche nel medesimo tempo l'equazioni differenziali $df = 0$, $d^2f = 0$ ecc., $dP = 0$, $d^2P = 0$ ecc., $dQ = 0$, $d^2Q = 0$ ecc., che da esse si deducono: dunque valori di $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ ec., ricavati dalle successive differenziazioni del $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{Q}{P}$, diverranno anche $\frac{0}{0}$, riducendoli prima in semplici funzioni delle x, y per mezzo della sostituzione successiva dei valori di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ecc. dedotti dall'equazioni $f = 0$, $df = 0$ ec., quindi sostituendovi il valore della y fatto colla x dato dalla soluzione particolare $s = 0$.

Questa proprietà di rendere indeterminate le quantità $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ecc., è il vero carattere che

aver debbono le soluzioni particolari, e si giungerebbe all' assurdo quando esse ne fossero prive.

Per comprendere tutto questo, io osservo che se per mezzo dell' equazioni $f=0$, $df=0$, $d^2f=0$ ecc. si trovano i valori di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ecc. funzioni delle x, y; e supponiamo $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\phi(x, y)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\phi'(x, y)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\phi''(x, y)$ ecc., e per esprimere l' integrale completo di quest' equazione $f=0$, avremo la serie

$$y=A+x\phi(x, y)+\frac{x^2}{2}\phi'(x, y)+\frac{x^3}{2\cdot 3}\phi''(x, y)$$

+ ecc., nella quale però dee farsi $x=0$ nei coefficienti $\phi(x, y)$, $\phi'(x, y)$ ecc. La A costante che resta arbitraria, rappresenta il valore della y quando $x=0$.

Dandò ad A diversi valori particolari, si hanno i diversi integrali particolari della proposta; e se fosse dato un integrale particolare espresso dall' equazione $s=0$, si troverebbe il valore dell' A, e quindi la serie che a quello corrisponde in questa guisa. Ricavato il valore della y dall' equazione $s=0$, sia $y=\Psi x$, e si avrà

$$y=\Psi x+x\phi(x, \Psi x)+\frac{x^2}{2}\phi'(x, \Psi x)+\text{ecc.},$$

ove dee farsi

$x=0$ in Ψx, $\phi(x, \Psi x)$, $\phi'(x, \Psi x)$ ecc.

Questa serie sarebbe allora un valore particolare della y compreso nel completo, e la costante A è $\Psi 0$.

Se quell' equazione $s = 0$ fosse stata una soluzione particolare, e non avesse rese eguali $\frac{0}{0}$ le quantità $\phi'(x, y)$, $\phi''(x, y)$ ecc., ci avrebbe essa condotti egualmente alla suddetta serie, la quale è un integrale particolare e non una soluzione, il che sarebbe stato assurdo: col divenire determinate le quantità $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ecc., l'analisi ci ha avvertiti che quella serie non può rappresentare la soluzione particolare.

Data un' equazione tra x, y, la quale soddisfaccia ad una differenziale, e sia priva di costante arbitraria, si potrebbe di qui ricavare anche il mezzo onde conoscere se quella relazione è un integrale ovvero una soluzione particolare.

CAPO XIX.

Continuazione delle dottrine delle soluzioni particolari.

§ 351. Data un' equazione differenziale, abbiamo insegnato a trovarne le soluzioni particolari. Ora, data una soluzione particolare, cerchiamo l'equazione differenziale cui può appartenere.

Rappresentiamo con $F(x, y, a, b) = 0$ un integrale completo tra x, y e due costanti a, b, una delle quali sia funzione qualunque dell' altra, pel che siavi tra di esse la relazione espressa da una equazione $f(a, b) = 0$. Otterremo il differenziale del supposto integrale, eliminando queste due costanti per mezzo delle tre equazioni

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

$$dF = \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = 0,$$

$$(a, b) = 0.$$

Se dunque noi ricaviamo dalle due prime i valori dell' a e del b dati per mezzo delle x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, di modo che sia

$$a = \phi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} = \phi,$$

$$b = \Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} = \Psi,$$ e li sostituiamo nella terza equazione, avremo l' equazione differenziale $f(\phi, \Psi) = 0$.

Dunque reciprocamente ogni equazione differenziale di questa forma avrà per integrale completo l' equazione $F(x, y, a, b) = 0$, regnando tra le due costanti a, b la relazione rappresentata dalla equazione $f(a, b) = 0$, ed avremo nel tempo stesso

$$a = \phi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\},$$

$$b = \Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\}.$$

Dunque ogni valore della y fatto della x, il quale verificando l' equazione $f(\phi, \Psi) = 0$ non renderà le funzioni ϕ, Ψ costanti, non potrà esser compreso nell' integrale completo generale, e sarà quindi una soluzione particolare.

Sia $y = f'(x)$ questo valore o questa soluzione particolare, e sostituendo $f'(x)$, $\left(\frac{df'}{dx}\right)$ in vece della y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ nelle funzioni ϕ, Ψ, diverranno queste semplici funzioni della x, ed eliminando x tra di esse, si avrà un' equazione tra ϕ e Ψ, che si prenderà come se fosse l' equazione $f(\phi, \Psi) = 0$: l' equazione dunque $y = f'x$ soddisfarà all' equazione

$f(\phi, \Psi) = 0$; ma non rendendo costanti le quantità ϕ, Ψ, non potrà essere compresa nell' integrale completo generale, e sarà per conseguenza una soluzione particolare.

§ 352. Ecco dunque a cosa si riduce tutto questo: sia $y = f'x$ la soluzione particolare data. Per avere l' equazione differenziale cui appartiene, prendasi ad arbitrio un' equazione qualunque

$(A) \ldots F(x, y \cdot a, b) = 0.$

Da questa equazione e dal suo differenziale $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ si ricavino i valori dell' a e del b fatti della x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e sostituendo in essi in vece della y e del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ i respettivi valori $f'x$, $\left(\frac{df'}{dx}\right)$, si avranno i valori dell' a e del b fatto della x soltanto; ora eliminando tra queste due equazioni il valore della x, si avrà un'equazione $f(a, b) = 0$ tra a e b.

Riponiamo in $f(a, b) = 0$ i primi valori dell'a, b fatti della x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed avremo l' equazione differenziale, della quale $y = f'x$ sarà la soluzione particolare, e $F(x, y, a, b) = 0$ l'integrale completo, essendo una delle due costanti funzione dell' altra data dall' equazione $f(a, b) = 0$.

E siccome l'equazione (A) è arbitraria, si avranno così infinite equazioni differenziali che corrisponderanno alla stessa soluzione particolare $y = f'x$.

Per esempio, propongasi come soluzione particolare l' equazione $y - Ax - B = 0$, e si dimandi a quale equazione differenziale corrisponde.

Prendendo, in vece dell' equazione (A), l' equazione $y^2 - ax^2 + b = 0$, e differenziandola, si avrà

$y\left(\frac{dy}{dx}\right) - ax = 0$, e quindi

$a = \frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $b = y^2 - xy\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

La soluzione particolare proposta ci dà
$y = Ax + B$, $y^2 = A^2x^2 + 2ABx + B^2$, e
$y\left(\frac{dy}{dx}\right) = A^2x + AB$; dunque facendo le opportune sostituzioni nei valori dell' a e del b, avremo
$a = A^2 + \frac{AB}{x}$, $b = ABx + B^2$, e l'eliminazione della x ci darà $(a - A^2)(b - B^2) - A^2B^2 = 0$, cioè
$ab - B^2a - A^2b = 0$.

Sostituiamo in quest' ultima equazione i valori dell' a e del b fatti della x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e si avrà

$$\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)\left\{y^2 - xy\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} - \frac{B^2y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$- A^2\left\{y^2 - xy\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0.$$

Quest' equazione differenziale pertanto avrà per soluzione particolare $y - Ax - B = 0$, e per integrale completo $y^2 - ax^2 - b = 0$, supponendo tra a e b quest' equazione $ab - B^2a - A^2b = 0$; se da essa ricaviamo il valore del b, avremo $b = \frac{B^2a}{a - A^2}$, e l'integrale sarà completo $y^2 - ax^2 - \frac{B^2a}{a - A^2} = 0$.

§ 353. Veniamo a qualche problema geometrico, nel risolvere il quale incontransi le soluzioni particolari.

Si dimanda una curva tale, che la normale in qualunque suo punto abbia una data relazione con la porzione dell' asse, intercetta tra l' origine delle ascisse e la normale medesima, di modo che, se per a si rappresenti questa porzione e per b quella normale, sia $b = \Psi(a)$.

Dal § 74 si hanno i valori dell'a e del b, ed è

$$a = x + y\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad b = y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}};$$

dunque l' equazione differenziale

$$y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = \Psi\left\{x + y\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$$

sarà quella dalla integrazione della quale dipende la soluzione del problema.

Per un caso particolare facciamo $b^2 = ac$, e la equazione differenziale sarà

$$y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left[c\left\{x + y\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}\right]}.$$

Ricaviamo da questa il valore della $y\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e si avrà

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{c}{2} + \sqrt{\left\{\frac{c^2}{4} + cx - y^2\right\}}, \text{ ovvero}$$

$$c - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + cx - y^2\right)} = 0, \text{ ovvero}$$

$$cdx - 2ydy + 2dx\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + cx - y^2\right)} = 0, \text{ ovvero}$$

$$\frac{cdx - 2ydy}{2\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + cx - y^2\right)}} + dx = 0.$$

L' integrale di quest' equazione è

$\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + cx - y^2\right)} + x = h$, ove h indica una costante arbitraria; e questa è l'equazione della curva cercata.

Mandiamo via il radicale da quell' integrale, ed avremo $\frac{c^2}{4} + cx - y^2 = (h - x)^2$, ch' è l' equazione al circolo.

Di fatto, facciamo $h = e - \frac{c}{2}$, essendo e una nuova costante arbitraria, e si avrà $y^2 + (e - x)^2 = ec$, ove la e rappresenta l' ascissa del centro, la $\sqrt{ec}$ il raggio.

Dunque un circolo che abbia il suo centro nell' asse all' estremità di qualunque ascissa e, ed il cui raggio, ch' è la stessa normale, sia $\sqrt{ec}$, soddisfarà alla dimanda; e siccome infiniti valori dar possiamo all' e, così avremo infinite soluzioni del problema.

§ 354. Ora si può dimandare se vi saranno altre curve che sciolgano lo stesso quesito, ciò che equivale a dire, se vi saranno altre relazioni tra le variabili x, y che soddisfacciano a quell' equazione differenziale

$cdx - 2ydy + 2dx\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + cx - y^2\right)} = 0$, oltre l'integrale $y^2 + (e - x)^2 = ec$.

Ad un' equazione differenziale, oltre l' integrale completo, soddisfanno le soluzioni particolari se ne ha. Cerchiamo dunque queste seconde relazioni nel nostro caso. Data all' integrale la forma $y^2 + (e - x)^2 - ec = 0$, prendiamone il differenziale considerando soltanto e variabile; ed avremo

$2(e-x)-c=0$, $e=\frac{c+2x}{2}$. Questo valore, sostituito nell' integrale completo, ci dà

$y^2=cx+\frac{c^2}{4}$, che è la soluzione particolare della mentovata equazione differenziale: soddisfarà dunque al problema anche la curva espressa da

$y^2=cx+\frac{c^2}{4}=c\left(x+\frac{c}{4}\right)$, che è una parabola apolloniana.

Abbiamo dunque un numero infinito di circoli che risolvono la questione, ed una sola parabola apolloniana. Quelli ci sono dati dall' integrale completo, questa dalla soluzione particolare.

§ 355. Il problema di cui si tratta fu risoluto la prima volta da Leibnizio. Negli Atti di Lipsia del 1694 questo gran geometra dette la maniera di trovare la curva formata dall' intersecazione continua di una infinità di curve, comprese in una medesima equazione, facendo variare in essa il parametro nella grandezza del quale esse differiscono l' una dall' altra.

Leibnizio risguardava la curva cercata come nata dall' intersecazione continua di un' infinità di circoli che hanno i loro centri nell' asse. I raggi dei circoli erano allora le normali alla curva; e la relazione data dal problema tra le normali e le parti corrispondenti dell' asse, trovasi tra i raggi e le ascisse corrispondenti ai centri dei circoli.

In conseguenza di questo discorso chiamando b il raggio di un circolo, a l' ascissa corrispondente al centro, x, y le coordinate, l' equazione $y^2+(a-x)^2=b^2$ è quella di questo circolo; e supponendo che il quadrato della normale b esser debba eguale al rettangolo dell' ascissa a in una data costante c, cioè $=ac$, quest' equazione diventerà $y^2+(a-x)^2=ac$.

Leibnizio differenzia questa equazione, risguardando la sola a come variabile, ed ottiene

$2(a-x)\,da = c\,da$, da cui $a = \frac{c+2x}{2}$; sostituendo questo valore dell' a in $y^2 + (a-x)^2 = ac$, si trova l' equazione $y^2 = \left(x + \frac{c}{4}\right)c$, che è quella della parabola apolloniana.

Si vede che quel geometra ha risoluto il problema nella guisa medesima che si risolve colla soluzione particolare dell' equazione differenziale cui lo stesso problema conduce: egli però lasciò in questo caso da banda la ricerca dell' equazione differenziale, e quindi della di lei integrazione.

§ 356. La soluzione di Leibnizio è ricavata, come abbiamo veduto, dalla considerazione della curva formata dall' intersecazione continua di tutti i circoli che ottengonsi facendo continuamente variare il parametro costante a; generalmente parlando, si può dimostrare che le soluzioni particolari godono di questa proprietà: esse appartengono alle curve generate dalla continua intersecazione di altre curve, le quali sono rappresentate dall' integrale completo, e si ottengono quando in esso si faccia continuamente variare la costante arbitraria.

Di fatto, la curva prodotta dall' intersecazione continua di una serie di curve pochissimo differenti l'una dall'altra, è la curva che abbraccerebbe o toccherebbe tutte queste curve, e che perciò avrebbe in ciascuno dei suoi punti una tangente comune con una di queste curve stesse.

Ora sia $F(x, y, a) = 0$ l' equazione generale delle curve delle quali si tratta, a essendo il parametro che è costante in ciascuna di esse, ma che è diverso dall' una all' altra: la curva che debbe abbracciarle ha un punto comune con ciascuna di queste curve; essa avrà in conseguenza le medesime coordinate x, y, e la stessa equazione tra di esse,

con questa sola diversità che il parametro a sarà variabile nell' equazione $F(x, y, a) = 0$ finchè essa apparterrà alla curva che abbraccia tutte le altre.

Di più, bisognerà che la posizione della tangente sia la medesima nella curva dove a è costante, ed in quella ove è variabile : ora si sa che la posizione di una tangente dipende dal valore del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, giacchè la suttangente è rappresentata da $y : \left(\frac{dy}{dx}\right)$; dunque bisognerà che il valore del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ricavato dal differenziale della $F(x, y, a) = 0$, sia il medesimo tanto risguardandovi a come costante, quanto come variabile funzione della x: dunque la porzione del differenziale $F(x, y, a) = 0$ relativa all' a, cioè, $da\left(\frac{dF}{da}\right)$, dovrà essere nulla : dunque risguardando $F(x, y, a) = 0$ come l' equazione della curva che abbraccia le altre, bisognerà che il parametro a sia una tal funzione variabile da annullare la quantità $\left(\frac{dF}{da}\right)$.

Avremo pertanto il valore dell' a risolvendo l' equazione $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$. Questo, sostituito nella $F(x, y, a) = 0$, ci darà l' equazione della curva abbracciante.

L' equazione $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ è quella che ci somministra la soluzione particolare, quando l' integrale completo è $F(x, y, a) = 0$.

Dunque l' equazione della curva abbracciante tutte le altre, è la stessa soluzione particolare corrispondente all' integrale completo $F(x, y, a) = 0$, dal quale sono rappresentate le curve abbracciate.

Questa considerazione geometrica ci presenta il legame che vi è tra le curve rappresentate dalla soluzione particolare e quella rappresentata dall' integrale completo.

§ 357. Il problema analitico da noi risoluto si riduce a trovare le curve, le quali avendo un parametro variabile, possano formare con la loro reciproca intersecazione una curva data: possiamo per conseguenza esporre così quel problema.

Abbiansi due curve di cui l' equazioni sieno date, e delle quali una contenga due costanti arbitrarie, e si ricerchi la relazione necessaria tra queste due costanti, onde facendo variare quella che resta arbitraria, ne nascano un' infinità di curve del medesimo genere, le quali con la loro reciproca intersezione producano l' altra curva data.

La soluzione di questo problema dipende dal determinare la relazione tra le due costanti a, b dell' equazione data $F(x, y, a, b) = 0$, affinchè quest' equazione, presa per l' integrale completo, abbia per soluzione particolare $y = f'x$ che sarà l' equazione della curva abbracciante tutte quelle date dall' altra equazione.

E se proposto questo problema: *Data una curva che ha per equazione* $F(x, y, a, b) = 0$ *nella quale* a, b *sono due parametri indeterminati, trovare l' equazione di un' altra curva che tocchi la prima con un contatto del primo ordine e che faccia sì che sia tra i parametri* a, b *una relazione contenuta in una data equazione* $\phi(a, b) = 0$. Ecco come lo risolveremo.

Da quest' ultima equazione ricaviamo il valore del b dato per mezzo dell' a, e sia $b = fa$, e sostituito nella prima, avremo $F(x, y, a, fa) = 0$.

Il problema allora si ridurrà a trovare una curva che abbia con quella dell' equazione $F(x, y, a, fa) = 0$ un contatto di primo ordine.

L' equazione dunque della curva cercata dovrà esser tale che dia per y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ gli stessi valori che ci danno l' equazioni

$F(x, y, a, fa) = 0$,

$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$.

Si vede intanto che la stessa $F(x, y, a, fa) = 0$ soddisfà al problema, qualunque sia il valore dell' a.

Ora, essendo a una quantità indeterminata, possiamo supporla tale che la curva cercata sia rappresentata dalla medesima equazione $F(x, y, a, fa) = 0$, purchè il differenziale primo di questa abbia la stessa forma

$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$; ma se a è una quantità variabile, il differenziale primo di $F(x, y, a, b) = 0$ è

$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{da}\right)\left\{\left(\frac{da}{dx}\right) + \left(\frac{da}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$;

dunque la condizione di cui si tratta sarà adempita se si determina l' a per mezzo dell' equazione $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$.

Avremo così un valore dell' a, il quale, sostituito in $F(x, y, a, fa) = 0$, ci darà l' equazione della curva cercata.

Tale equazione poi è una soluzione particolare, mentre $F(x, y, a, fa) = 0$ è l'integrale completo, e la curva è quella la quale viene prodotta dalla continua intersecazione di quella serie di curve, pochissimo differenti l' una dall' altra, che si ottengono dando ad a dei valori poco differenti tra loro nella equazione $F(x, y, a, fa) = 0$.

§ 358. Venendo a parlare delle soluzioni particolari nell' equazioni differenziali parziali, se si ha un' equazione del primo ordine

$F\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), \right\}=0$, il suo integrale completo debbe contenere due costanti arbitrarie. Sia $f(x, y, z, a, b)=0$ quest' integrale, e quell' equazione risulterà dall' eliminare a, b per mezzo della equazione $f=0$, e dei due differenziali parziali di essa rispetto alla x e alla y.

La soluzione particolare poi si avrà dando all' a ed al b non due valori costanti, ma due valori variabili, e tali che i termini portati dalla variazione di essi siano nulli da sè medesimi. Troveremo questi valori col mezzo dell' equazioni $\left(\frac{df}{da}\right)=0$, $\left(\frac{df}{db}\right)=0$, e quella soluzione particolare si avrà eliminando a e b per mezzo di queste tre equazioni

$f=0$, $\left(\frac{df}{da}\right)=0$, $\left(\frac{df}{db}\right)=0$.

Per esempio l' integrale completo dell' equazione

$$z=y\left(\frac{dz}{dy}\right)+x\left(\frac{dz}{dx}\right)+h\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}$$

essendo $z=ax+by+h\sqrt{(1+a^2+b^2)}$, ecco come ne troveremo la soluzione particolare.

Dalle due equazioni

$$\left(\frac{dz}{da}\right)=x+\frac{ha}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}=0,$$

$$\left(\frac{dz}{db}\right)=y+\frac{hb}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}=0 \text{ ricaveremo}$$

$$a=\frac{\mp x}{\sqrt{(h^2-x^2-y^2)}},$$

$b = \frac{\pm y}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}}$; e sostituendo questi valori nell'integrale completo, otterremo $z = \pm\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}$, che sarà la ricercata soluzione particolare.

§ 359. Se non fosse dato l'integrale completo, vediamo come ottener se ne potrebbe la soluzione particolare. Noi seguiamo un ragionamento simile a quello fatto per l'equazioni differenziali semplici.

Sia $F(x, y, z, a, b) = 0$ un integrale completo; l'equazine differenziale parziale cui appartiene, sarà il risultamento dell'eliminazione dell' a e del b tra queste tre equazioni

(1) . . . . . $F(x, y, z, a, b) = 0$,

(2) . . . . . $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$,

(3) . . . . . $\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$.

Siano $a = \phi\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = \phi$,

$$b = \Psi\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = \Psi$$

i due valori dell' a e del b, e sarà

(4) . . . . $F(x, y, z, \phi, \Psi) = 0$ quell' equazione coi differenziali parziali. Così l' equazione (1) sarà l' integrale completo dell' equazione (4).

Prendiamo i due differenziali parziali dell'equazione (4), e si avrà

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{dF}{d\phi}\right)$$
$$+ \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\left(\frac{dF}{d\Psi}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right)+\left(\frac{d\phi}{dy}\right)\left(\frac{dF}{d\phi}\right)$$
$$+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)\left(\frac{dF}{d\Psi}\right)=0;$$

queste equazioni si riducono semplicemente a queste altre:

$$(5)\ \ldots\ \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{dF}{d\phi}\right)+\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\left(\frac{dF}{d\Psi}\right)=0,$$

$$(6)\ \ldots\ \left(\frac{d\phi}{dy}\right)\left(\frac{dF}{d\phi}\right)+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)\left(\frac{dF}{d\Psi}\right)=0,$$

giacchè gli altri termini si annullano mercè l'equazioni (2), (3).

All' ultime equazioni si soddisfà facendo $\phi=a$, $\Psi=b$; così tanto il sistema delle due equazioni $\phi=a$, $\Psi=b$, quanto l'equazione $F(x,y,z,\phi,\Psi)=0$ soddisfanno alle due equazioni (5), (6), le quali sono differenziali parziali del second' ordine.

Se dunque eliminiamo, per mezzo delle tre equazioni $\phi=a$, $\Psi=b$, $F(x,y,z,\phi,\Psi)=0$, le quantità $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, avremo un' equazione tra x, y, z, a, b che sarà l' integrale completo della $F(x,y,z,\phi,\Psi)=0$; ed il risultamento di quell' eliminazione è la stessa equazione $F(x,y,z,a,b)=0$ donde siamo partiti.

Si soddisfarà all' equazioni (5), (6) anche facendo $\left(\frac{dF}{d\phi}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{d\Psi}\right)=0$, e si avranno in questa guisa due equazioni in x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$,

il sistema delle quali soddisfarà anche alle due (5), (6), nello stesso modo che vi soddisfà l' equazione $F(x, y, z, \phi, \Psi) = 0$: avremo dunque una nuova relazione tra x, y, z {la quale soddisfarà all' equazione con i differenziali parziali del primo ordine

$$F(x, y, z, \phi, \Psi) = 0\}\text{ eliminando } \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

tra queste tre equazioni $F(x, y, z, \phi, \Psi) = 0$,

$$\left(\frac{dF}{d\phi}\right) = 0, \left(\frac{dF}{d\Psi}\right) = 0.$$

Questa eliminazione dà lo stesso risultamento che dà l' eliminazione dell' a e del b dalle tre equazioni

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \left(\frac{dF}{da}\right) = 0, \left(\frac{dF}{db}\right) = 0:$$

dunque esso è la soluzione particolare.

§ 360. Sia ora proposta un' equazione differenziale qualunque del primo ordine:

$$f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = 0\text{: quest' equazione}$$

risulta dall' eliminare le due costanti a, b per mezzo dell' integrale completo $F(x, y, z, a, b) = 0$, e delle sue differenziali parziali

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0\text{: ora il risultamento di}$$

quest' eliminazione essendo $F(x, y, z, \phi, \Psi) = 0$, le due equazioni

$$f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = 0,$$

$F(x, y, z, \phi, \Psi) = 0$ saranno identiche, o differiranno a causa di qualche fattor comune che si ritrovi in una di esse. Sia dunque M questo fattore, ed abbiasi

$$MF(x, y, z, \phi, \Psi) = f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}:$$

sarà

$$F(x, y, z, \phi, \Psi) = \frac{1}{M} f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}.$$

Prendiamo i due differenziali parziali di questa ultima equazione, ed avremo

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{dF}{d\phi}\right) + \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\left(\frac{dF}{d\Psi}\right) = \frac{1}{M}\left(\frac{df}{dx}\right) - \frac{f}{M^2}\cdot\left(\frac{dM}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dy}\right)\left(\frac{dF}{d\phi}\right) + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)\left(\frac{dF}{d\Psi}\right) = \frac{1}{M}\left(\frac{df}{dy}\right) - \frac{f}{M^2}\left(\frac{dM}{dy}\right)$$

i quali sommati ci daranno un' equazione co' differenziali totali

$$d\phi\cdot\left(\frac{dF}{d\phi}\right) + d\Psi\cdot\left(\frac{dF}{d\Psi}\right) = \frac{1}{M}\cdot df - \frac{f}{M^2}\cdot dM;$$

da questa si ricava

$df = M\left(\frac{dF}{d\phi}\right) d\phi + M\left(\frac{dF}{d\Psi}\right) d\Psi + \frac{f\cdot dM}{M}$, che è la formola generale del differenziale totale della funzione

$$f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}.$$

Data dunque un' equazione del primo ordine $f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = 0$, potremo soddisfare al di lei differenziale totale indipendentemente dai

valori di $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ per mezzo delle due equazioni $\left(\frac{dF}{d\Psi}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{d\Psi}\right)=0$, combinate con la proposta $f=0$.

Ora prendendo il differenziale totale dell' equazione $f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}=0$,

si ha ponendo p, q in vece dei $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{df}{dz}\right)+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{df}{dp}\right)\right. \\ \left.+\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)\left(\frac{df}{dq}\right)\right\}dx+\left\{\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{df}{dz}\right)\right. \\ \left.+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{df}{dq}\right)+\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\left(\frac{df}{dp}\right)\right\}dy \end{array}\right\}=0;$$

dunque paragonando questo differenziale con la formola generale sopra trovata, si avrà quest' equazione

$$\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{df}{dz}\right)\right\}dx+\left\{\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{df}{dz}\right)\right\}dy$$

$$+\left(\frac{df}{dp}\right)d\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dq}\right)d\left(\frac{dz}{dy}\right)=M\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)d\varphi$$

$$+M\left(\frac{dF}{d\Psi}\right)d\Psi+\frac{f\cdot dM}{M},$$ che sarà identica.

Ora si riduce nullo il secondo membro, senza che vi abbiano che fare i differenziali parziali del secondo ordine, col porre

$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0$; $\left(\frac{dF}{d\Psi}\right)=0$, $f=0$; si riduce anche nullo

il primo, senza che vi abbiano che fare gli stessi differenziali, col porre

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{df}{dz}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{df}{dz}\right) = 0,$$

$\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$, $\left(\frac{df}{dq}\right) = 0$; dunque quelle tre equazioni daranno origine a queste quattro. Ma si aveva una soluzione particolare eliminando $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ per mezzo di $f = 0$, $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{d\Psi}\right) = 0$; dunque si avrà egualmente una soluzione particolare eliminando $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ per mezzo di quelle ultime quattro equazioni e della proposta $f = c$.

Essendo cinque l'equazioni e due le quantità da eliminarsi, si avranno tre equazioni senza tali quantità; e se queste si ridurranno ad una sola, o avranno un fattore comune, allora quella sola equazione o quel fattore comune sarà la cercata soluzione particolare.

Ecco dunque in che cosa consiste questa regola: *Data un' equazione differenziale parziale del primo ordine* $f = 0$, *se ne prenda il differenziale totale, e fatti sparire i denominatori, avendo esso la forma*

$Md\left(\frac{dz}{dx}\right) + Nd\left(\frac{dz}{dy}\right) + Pdx + Qdy = 0$, *si faccia*

$M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, *quindi eliminando da queste equazioni, combinate con la proposta* $f = 0$, *le quantità* $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, *si osservi se i tre risultamenti*

che si ottengono, si riducono ad una sola equazione tra x, y, z; *quando ciò succeda, sarà quella relazione la soluzione particolare; non vi sarà più soluzione, se quelle equazioni non si riducono ad una sola.*

§ 361. Per esempio, differenziando l' equazione

$$z = y\left(\frac{dz}{dy}\right) + x\left(\frac{dz}{dx}\right) + h\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}},\ \text{si ha}$$

$$yd\left(\frac{dz}{dy}\right) + xd\left(\frac{dz}{dx}\right) + h\frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)d\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} = 0,$$

e quindi

$$\left.\begin{array}{l} \left\{y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} + h\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} d\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ + \left\{x\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} + h\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\} d\left(\frac{dz}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0;$$

mancano dunque i due coefficienti P e Q, ed abbiamo soltanto queste due equazioni

$$M = y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} + h\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

$$N = x\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} + h\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

le quali danno primieramente $x\left(\frac{dz}{dy}\right) = y\left(\frac{dz}{dx}\right)$, poi

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\mp y}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}},$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\mp x}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}},$$

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} = \frac{\pm h}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}};$$

sostituiamo questi valori nella proposta, ed avremo la cercata soluzione particolare $z = \pm \sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}$.

Osserviamo che all' equazioni a differenziali parziali soddisfanno tre sorte di relazioni: alcune contengono costanti arbitrarie; altre, funzioni arbitrarie; ed altre in fine non contengono alcuna quantità arbitraria: nè queste equazioni possono ricavarsi l' una dall' altra col dar dei valori particolari costanti a quelle stesse arbitrarie.

Vedremo altrove i rapporti geometrici che hanno le curve rappresentate da queste relazioni.

§ 362. Analogo al problema risoluto al (§ 353) è quello conosciuto sotto il nome di *problema delle trajettorie*.

Ecco in che consiste: supponiamo che si abbia un' equazione tra x, y, ed un parametro costante a. Rappresenti (*Fig.* 22) questa la curva AB. Dando all' a infiniti valori diversi, si avranno infinite curve, come AB', AB'', ecc., della stessa natura. La differenza consisterà solo nel parametro il quale avrà diverse grandezze.

Data ora una famiglia di queste curve, si suole trovare la curva EMF, che le seghi tutte sotto un angolo dato $B'MF$. La curva EMF chiamasi *trajettoria*.

La trajettoria EF ha sempre un punto comune con una delle curve tagliate. In ogni suo punto dunque le coordinate hanno tra loro la stessa relazione che hanno quelle della tagliata corrispondente. L' espressioni che in due qualunque punti della curva EF rappresentano queste relazioni, non differiranno dunque tra loro che nella grandezza del parametro, avendovi esso in ciascuno di quei punti quel valore che appartiene alla curva corrispondente a quel punto medesimo.

Se dunque $F(x, y, a) = 0$ rappresenta l'equazione delle tagliate, vale a dire, la relazione delle coordinate in ciascun punto di una tagliata, la stessa $F(x, y, a) = 0$ rappresenterà l' equazione della

trajettoria, o la relazione in ciascun di lei punto, purchè la quantità a si consideri costante nel primo caso, e variabile nel secondo.

Determiniamo la variazione dell' a in maniera che siano soddisfatte le condizioni di quel segamento, ed il problema sarà risoluto.

Se noi supponiamo condotte al punto M due tangenti, una alla curva segata, ed un'altra alla segante, l' angolo che fanno tra loro queste tangenti, sarà quello che fanno tra loro le curve. Rappresenti $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ la tangente di quell' angolo che la tangente della tagliata nel punto M fa con l' asse delle ascisse (*Fig.* 5) : sia $\left(\frac{dy}{dx}\right)'$ la tangente di quell' angolo, che la tangente della trajettoria $B'MF$ nello stesso punto fa col medesimo asse.

L' angolo $B'MF$ sotto cui si segano le curve, sarà dunque la differenza di questi due angoli: la sua tangente sarà dunque eguale alla formola

$$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)' - \left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)' \left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

E siccome questa tangente debb' essere costante; perciò indicatala con m, avremo l' equazione

$$(E) \ldots\ldots \left(\frac{dy}{dx}\right)' - \left(\frac{dy}{dx}\right) = m + m \left(\frac{dy}{dx}\right)' \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

dalla quale dipenderà la soluzione del problema.

Il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ si caverà dal differenziale di $F(x, y, a) = 0$ nell' ipotesi dell' a costante: allora questo sarà una funzione delle x, y, a, e lo sostituiremo nell' equazione differenziale trovata.

Il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)'$ si caverà dalla stessa equazione $F(x, y, a) = 0$ nella supposizione dell' a variabile, e sostituitolo nell' equazione differenziale snddetta, si avrà allora un' equazione tra x, y, a e la differenziale dell' a. Da quest' ultima equazione elimineremo y per mezzo della $F(x, y, a) = 0$, ed otterremo in fine un' equazione differenziale tra x ed a, dall' integrazione della quale si caverà il valore dell' a dato per mezzo della x.

§ 363. Gli esempj schiariranno questa teorica. Siano le tagliate tante linee rette, rappresentate dall' equazione $y = ax$: avremo allora

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)' = a + \left(\frac{da}{dx}\right) x$: fatte queste sostituzioni nell' equazione (E), essa diverrà

$$a + \left(\frac{da}{dx}\right) x - a = m + ma^2 + max \left(\frac{da}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{da}{dx}\right) \{x - max\} = m + ma^2,$$

$$\frac{1 - am}{1 + a^2} \left(\frac{da}{dx}\right) = \frac{m}{x},$$

$$\frac{1 - am}{1 + a^2} da = \frac{mdx}{x},$$

$$\frac{da}{1 + a^2} - \frac{mada}{1 + a^2} = \frac{mdx}{x},$$

$Arc\ tang\ a - ml \sqrt{(1 + a^2)} + mlc = mlx$; ove c rappresenta una costante arbitraria.

Per mezzo di quest' ultima equazione e della $y = ax$, elimineremo a, ed avremo

$ml \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{c} = Arc\ tang\ \frac{y}{x}$, ovvero

$l\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{c} = \frac{\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}}{m}$: quest' è l' equazione della trajettoria: rappresenta essa una spirale logaritmica. Se la trajettoria dovesse segare ad angolo retto quelle linee, allora la tangente m sarebbe infinita; quindi $l\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{c} = 0$, donde si ricava $\sqrt{(x^2+y^2)} = c$, ch' è l' equazione del circolo.

CAPO XX.

Ricerca delle superficie che toccano ed abbracciano altre superficie con un contatto dato.

§ 364. Rappresentate con p, q, r le coordinate di una superficie, la cui equazione sia $F(p, q, r, A, B, C) = 0$, noi abbiamo insegnato nel capo XII del *Calcolo differenziale* come si possano determinare due dei tre parametri A, B, C onde questa superficie abbia un contatto del primo ordine con un'altra, l'equazione della quale sia $f(x, y, z) = 0$.

Ora essendo incognita l' equazione della seconda superficie $f(x, y, z) = 0$, proponiamoci di ritrovarla, aggiungendo questa condizione che fra quei tre parametri A, B, C siavi una relazione data da una equazione $\phi(A, B, C) = 0$, il cui primo membro $\phi(A, B, C)$ può essere una funzione delle A, B, C, e delle coordinate del punto del contatto. Se quella relazione tra i parametri non ci fosse, qualunque equazione che si prendesse, basterebbe a sciogliere il problema, giacchè altro non dovrebbe farsi che sostituire, in vece delle A, B, C, i valori che per questi parametri si ricavano dall' equazioni

$$(a)\ldots\begin{cases} F(x,y,z,A,B,C)=0, \\ \left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right)=0, \\ \left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right)=0, \end{cases}$$

essendo x, y, z le coordinate del punto di contatto, e trovandosi tra di esse l'equazione $f(x, y, z)=0$ che avremmo assunta per isciogliere il quesito.

Stando però l'equazione $\phi(A, B, C)=0$ tra i parametri, ecco come faremo. Trovati, come si è detto qui sopra, i valori delle A, B, C, saranno questi altrettante funzioni delle quantità $x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$; se dunque noi li sostituiremo nell'equazione $\phi(A, B, C)=0$, avremo un'equazione coi differenziali parziali del primo ordine, l'integrale della quale ci darà l'equazione tra x, y, z, che sarà quella della superficie cercata.

Intanto noi concluderemo che, generalmente parlando, essendovi tre sorte d'equazioni le quali soddisfar possono ad un'equazione con i differenziali parziali, in tre modi risolvere potremo il problema.

§ 365. Per esempio, dato un piano, l'equazione del quale sia $r=A+Bp+Cq$, dimandasi l'equazione della superficie che da questo piano sarà toccata con un contatto di primo ordine, mentre tra A, B, C sia questa equazione $xB+yC+z=0$, essendo x, y, z le coordinate del punto del contatto.

A tenore di quanto è detto nel § antecedente, troveremo $B=\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $C=\left(\frac{dz}{dy}\right)$; pel che si avrà da integrare questa equazione $x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)+z=0$.

A questa equazione soddisfà $xz = b\left(\frac{y}{x}\right)^a$, essendo a, b due costanti arbitrarie; soddisfà anco $xz = \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$, indicando con $\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ una qualunque funzione arbitraria; e sono queste le due sole equazioni che vi soddisfanno, giacchè non vi è la soluzione particolare; dunque in due modi è risoluto il problema.

Nel primo il piano le cui coordinate sono p, q, r, e la cui equazione è

$$r = z + b(a+1)y^a \cdot x^{-a-1} - bay^a x^{-a-1}$$
$$- b(a+1)\frac{y^a}{x^{a+2}}p + ba \cdot \frac{y^{a-1}}{x^{a+1}}q,$$

ha un contatto di primo ordine colla superficie che ha per equazione $xz - b\left(\frac{y}{x}\right)^a = 0$, nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z. Nel secondo il piano le cui coordinate sono p, q, r, e la cui equazione

$$r = z + \left\{\frac{1}{x}\Psi + \frac{y}{x^2}\left(\frac{d\Psi}{d\omega}\right)\right\} - \frac{y}{x^2}\left(\frac{d\Psi}{d\omega}\right)$$
$$- \left\{\frac{1}{x^2}\Psi + \frac{y}{x^3}\left(\frac{d\Psi}{d\omega}\right)\right\}p + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d\Psi}{d\omega}\right)q,$$

ove Ψ indica una funzione dell' ω, essendo $\omega = \frac{y}{x}$, un tal piano, io dico, ha un contatto del primo ordine con la superficie rappresentata dall' equazione $xz - \Psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z.

§ 366. Quando l' equazione tra i parametri A, B, C non contiene altre quantità che questi parametri, il problema allora più facilmente si può risolvere, imperciocchè subito si può ottenere un' equazione che soddisfaccia a quella coi differenziali parziali, alla quale conduce il problema.

Ricaviamo dall' equazione $\phi(A, B, C) = 0$ il valore del C, e si abbia $C = \Psi(A, B)$; se sostituiremo questo valore nell' equazione della curva data $F(p, q, r, A, B, C) = 0$, si avrà $F\{p, q, r, A, B, \Psi(A, B)\} = 0$, e cangiate le coordinate p, q, r in x, y, z, avremo l' equazione $F\{x, y, z, A, B, \Psi(A, B)\} = 0$ la quale sarà l'integrale di quell' equazione coi differenziali parziali, cui conduceva il problema, qualunque costanti arbitrarie si prendano per A e per B.

Di fatto, riducendosi in questo caso il problema a trovare l' equazione di una tale superficie, che si abbiano per l' ordinata z e pei di lei differenziali parziali $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ gli stessi valori che si ricavano da queste tre equazioni

$$F\{x, y, z, A, B, \Psi(A, B)\} = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$

si concluderà che soddisfà al quesito la stessa $F(x, y, z, A, B, \Psi(A, B)\} = 0$; dunque sarà quest' equazione l' integrale con due costanti arbitrarie di quell' equazione $\phi(A, B, C) = 0$ coi differenziali parziali, dalla quale equazione dipendeva la soluzione del problema.

§ 367. Ma non solo quell' equazione sarà l' integrale dell' equazione differenziale parziale, e darà la soluzione cercata: ve ne saranno due altre le quali avranno i medesimi pregi, e le troveremo così:

Rappresentando il ritrovato integrale con $F(x, y, z, a, b) = 0$, nel quale a, b siano quelle due costanti arbitrarie, si ricaverà da esso l' integrale completo con una funzione arbitraria (§ 300) facendo $b = f(a)$, e prendendo per a una tal funzione della x, y, z che soddisfaccia a quest' equazione $\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0$: allora l' integrale completo colla funzione sarà $F(x, y, z, a, fa) = 0$, ove fa rappresenta la funzione arbitraria.

Generalmente parlando, questo integrale è rappresentato dal sistema delle due equazioni

$$\begin{cases} F(x, y, z, a, fa) = 0, \\ \left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0, \end{cases}$$

e risulta dall' eliminazione della quantità a.

Per ciò che spetta alla soluzione particolare, sarà questa il risultamento dell' eliminazione dell' a e del b per mezzo di queste tre equazioni

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad \left(\frac{dF}{da}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF}{db}\right) = 0:$$

essa dunque sarà, generalmente parlando, il sistema di tre equazioni. Onde averlo espresso da un' equazione sola, conviene ricavare dalle due ultime equazioni i valori dell' a e del b espressi per mezzo delle x, y, z e sostituirli nella prima.

In questa maniera si hanno tre equazioni che risolvono il problema, e perciò tre superficie curve diverse. Vediamo poi i rapporti geometrici che queste hanno tra loro.

§ 368. Ad una equazione a differenze parziali del primo ordine $V = 0$ soddisfanno tre equazioni, l'una contenente due costanti arbitrarie, l'altra contenente una funzione arbitraria, e la terza non contenente nè costanti nè funzioni; e supponendo $F(x, y, z, a, b) = 0$ la prima di queste equazioni, la seconda è $F(x, y, z, a, fa) = 0$, essendo a una funzione di x, y, z dataci dall'equazione $\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0$; e la terza $F(x, y, z, a, b) = 0$ prendendo per a, b due funzioni delle x, y, z dateci dalle due equazioni $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{db}\right) = 0$.

Indichiamo con s', s, t i valori delle a, b, e siano le tre equazioni suddette

(1) . . . . . $F(x, y, z, a, b) = 0$,

(2) . . . . . $F(x, y, z, s', fs') = 0$,

(3) . . . . . $F(x, y, z, s, t) = 0$.

La prima è l'integrale completato con due costanti arbitrarie, che chiameremo *integrale completo*; la seconda è l'integrale completato con una funzione arbitraria fs' della s', ed a questo daremo il nome di *integrale generale*; e la terza è la soluzione particolare. Ciascuna di queste tre equazioni dà per z, per $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ e per $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ tali valori che soddisfanno alla medesima equazione $V = 0$.

Abbiasi dall' equazione (1)

$z = \Psi(x, y, a, b)$,

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Psi'(x, y, a, b)$,

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \Psi_{,}(x, y, a, b)$, e l' equazione (2) ci darà egualmente

$z = \Psi\ (x, y, s', fs')$,

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Psi'\ (x, y, s', fs')$,

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \Psi_{,}\ (x, y, s', fs')$, giacchè la natura della s' è tale che i termini portati dalla di lei variazione si annullano da sè medesimi.

L' equazione (3) ci darà poi

$z = \Psi\ (x, y, s, t)$,

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Psi'\ (x, y, s, t)$,

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \Psi_{,}\ (x, y, s, t)$, annullandosi da sè medesimi i termini della variazione del t e della s.

§ 369. Ora se noi volessimo determinare i coefficienti di un piano tangente della superficie rappresentata dall' equazione (1) nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, sarebbero questi coefficienti altrettante funzioni conosciute delle x, y, a, b, di modo che se quel piano fosse rappresentato da

$r = A + Bp + Cq$, si avrebbe

$$A = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right) = \Psi\ (x, y, a, b) -$$

$$x\Psi'\ (x, y, a, b) - y\Psi_{,}\ (x, y, a, b),$$

$$B = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \Psi'\ (x, y, a, b),$$

$$C = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \Psi_{,}\ (x, y, a, b).$$

Nella medesima guisa, onde il piano fosse tangente della superficie rappresentata dalla equazione (2) nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, gli elementi sarebbero

$A = \Psi(x, y, s', fs') - x\Psi'(x, y, s', fs') - \ldots$
$y\Psi(x, y, s', fs')$,

$B = \Psi'(x, y, s', fs')$, $C = \Psi_{,}(x, y, s', fs')$;

vale a dire, i medesimi che i ritrovati superiormente, dando alle arbitrarie a, b i valori s', fs', essendo s' quel valore che per la a ci è dato dall' equazione

$$\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0.$$

Dunque di tutte le superficie rappresentate dall' integrale completo, dando alle a, b dei valori particolari costanti; quella la quale ha per costante a e $fa = b$, essendo $a = s'$, cioè eguale ad una data funzione delle coordinate del punto del contatto, funzione che è costante in tutta l' estensione di questa superficie, ha lo stesso piano tangente nel punto corrispondente alle x, y, z, che ha la superficie rappresentata dall' integrale generale: queste due superficie dunque si toccano tra loro: dunque la superficie dell' integrale generale sarà toccata in ciascun punto da una delle superficie dell' integrale completo; da quella, cioè, per la quale le costanti a, b sono s', fs', vale a dire funzioni determinate delle coordinate nel punto del contatto, e le quali, come abbiamo detto, si mantengono costanti per tutta l' estensione della superficie toccante data dall' integrale generale, e solo variano dall' una superficie toccante all' altra.

Ma tra gl' infiniti punti che possono considerarsi nella superficie rappresentata dall' integrale generale $F(x, y, z, s', fs') = 0$, debbono esservene di quelli nei quali, per quanto le coordinate x, y, z siano diverse, la quantità però s' resterà la medesima (stantechè gli aumenti portati da una ordinata compensano i decrementi portati dall' altra), di modo che sopra questa superficie dovrà esservi una linea per la quale il valore della s' sarà sempre lo stesso; dunque per tutto il tratto di questa linea la

superficie dataci dall' integrale generale sarà toccata da una delle superficie dateci dall' integrale completo, cioè da quella in cui le costanti a, b si fanno s', fs'.

La situazione di questa linea del contatto tra queste due superficie ci è data dall' equazione $\left(\frac{dF}{da}\right)+\left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right)=0$, la quale contiene la condizione che a si mantenga costante.

Di fatto, l'equazione $\left(\frac{dF}{da}\right)+\left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dE}{da}\right)=0$, essendo tra le variabili x, y, z, esprime ancora essa una superficie; dunque l' intersecazione di questa superficie con quella dataci dall' equazione $F(x, y, z, a, fa)=0$ ci darà la linea nella quale la superficie dell' integrale generale e quella dell' integrale completo si toccheranno.

Scelto dunque nella superficie dell' integrale generale un punto corrispondente alle coordinate x, y, z, per questo punto passerà la linea del contatto della quale si parla; si prenda nella suddetta superficie un altro punto corrispondente ad altre coordinate x', y', z', pel quale s' divenga diversa, e si rappresenti con s''; per questo secondo punto nella superficie rappresentata dall' integrale generale passerà un' altra linea, per tutta l' estensione della quale questa superficie sarà toccata da una delle superficie rappresentate dall' integrale completo $F(x, y, z, a, b)=0$, da quella, cioè, nella quale si fa $a=s''$, $b=fa=fs''$. Si dica lo stesso per un terzo punto, per un quarto, ecc. Ora per ogni valore diverso che riceve la s', si ha una diversa linea del contatto, un diverso valore per a', ed una diversa superficie dell' integrale completo, la quale in quella linea tocca la superficie dell' integrale generale; dunque inversamente l' integrale completo $F(x, y, z, a, fa)=0$, ove a è costante, ci darà, col variarne successivamente il valore, una infinità

di superficie successive, delle quali ciascuna avrà una linea di contatto con la superficie rappresentata dall'integrale generale; ed è facile comprendere che queste linee di contatto saranno l'intersecazioni mutue delle medesime superficie, e che quindi la superficie rappresentata dall'integrale generale sarà essa medesima formata da tutte queste successive intersecazioni, abbraccerà tutte quelle successive superficie dell'integrale completo, essendo, come suol dirsi, il loro inviluppo.

§ 370. Con lo stesso raziocinio dimostreremo che la superficie della soluzione particolare $F(x, y, z, s, t)=0$ e quella dell'integrale completo $F(x, y, z, a, b)=0$ hanno lo stesso piano tangente nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, se alle due costanti noi diamo i valori s, t i quali sono funzioni determinate dalle stesse coordinate al punto del contatto, e si mantengono costanti in tutta l'estensione della superficie dell'integrale completo.

Dunque la superficie della soluzione particolare in qualunque di lei punto è toccata da una delle superficie dell'integrale completo, da quella, cioè, ove i parametri a, b sono s, t. Le due superficie si toccheranno in un punto unico, poichè le tre superficie rappresentate dall'equazioni

$$F(x, y, z, a, b)=0, \left(\frac{dF}{da}\right)=0, \left(\frac{dF}{db}\right)=0$$

non possono avere che un solo punto comune.

Assegnati poi due valori qualunque ai parametri a, b, si potranno sempre trovare i valori delle x, y, z espressi per mezzo delle a, b, i quali corrispondono al punto di contatto tra quelle due superficie; di modo che la superficie della soluzione particolare sarà toccata da tutte le superficie rappresentateci dall'integrale completo, dando alle a, b dei valori qualunque. Non vi sarà però che un solo punto di contatto tra la soluzione particolare ed una delle superficie dell'integrale completo.

Segue da tutto questo che la superficie della soluzione particolare si potrà risguardare come l' intersecazione mutua e continua di tutte le superficie dell' integrale completo, ottenute col far variare successivamente le costanti a, b.

Ed ecco spiegati i diversi rapporti geometrici che hanno tra loro gl' integrali dell' equazioni a differenziali parziali.

§ 371. Al § 186 noi abbiamo data l'equazione delle superficie cilindriche, ricavandola dalla maniera con la quale sono generate: per far alcuna applicazione delle cose dette sopra, troviamo l' equazione di questa famiglia di superficie, considerando la proprietà che aver debbe un piano che ne sia tangente.

Rammentiamo la genesi delle superficie cilindriche: *Data nello spazio una qualunque linea retta, se c' immaginiamo un' altra retta, cui si dà il nome di* generatrice, *la quale si muova nello spazio, restando però sempre parallela alla data, e che lasci in questo movimento continue vestigia del suo passaggio, descriverà una superficie curva: a tutte le superficie generate in questa guisa si dà il nome di superficie cilindriche.*

Riflettendo qualche poco su di questa generazione, si concepirà che un carattere distintivo di esse, quello si è *che un piano tangente in qualunque punto di esse è sempre parallelo alla retta generatrice.*

Siano dunque $s = mt$, $v = nt$ l' equazioni di una retta (s, v, t ne sono le coordinate) che passa dall' origine cui la generatrice esser debbe parallela, ed anche il piano sarà parallelo ad una tal retta.

Siano x, y, z le coordinate del punto del contatto tra il piano e la superficie: siano p, q, r le coordinate del piano tangente, e la di lui equazione $r = a + bp + cq$ diverrà

$$r - z = (p - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (q - y)\left(\frac{dz}{dy}\right):$$

Il piano rappresentato da questa equazione sarà parallelo se, trasportato parallelamente a sè stesso

sino a passare dall' origine, coinciderà allora con quella retta data.

Perchè il piano passi dall' origine bisogna che la sua equazione sia tale che fatti $p = 0$, $q = 0$, ne venga $r = 0$: l' equazione dunque diverrà

$r = p\left(\frac{dz}{dx}\right) + q\left(\frac{dz}{dy}\right)$: ma dovendo allora questo piano coincidere con la retta, dovrà l' equazione stare a martello se in vece delle r, p, q poniamo le coordinate della retta data s, v, t: avremo dunque

$t = s\left(\frac{dz}{dx}\right) + v\left(\frac{dz}{dy}\right)$, ove ponendo, in vece delle s, v, i respettivi valori, si avrà

$1 = m\left(\frac{dz}{dx}\right) + n\left(\frac{dz}{dy}\right)$; è questa un' equazione coi differenziali parziali, dall' integrazione della quale dipende la soluzione del problema : ad essa saremmo anco giunti eliminando la funzione arbitraria col mezzo dei differenziali parziali dall' equazione data al § 186 qui sopra citato.

§ 372. Ora osservo che essendo $\left(\frac{dz}{dx}\right) = b$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = c$, il problema si ridurrà a *trovare una superficie tale, che il piano tangente in un qualunque suo punto abbia tra i coefficienti* c, b *quest' equazione* $1 = mb + nc$, *essendo esso rappresentato da* $r = a + bp + cq$.

Secondo ciò che abbiamo dimostrato al (§ 366), ricaviamo da quell' equazione di condizione il valore del c, e sostituito nell' equazione del piano, avremo

$z = a + bx + \frac{1 - mb}{n}y$, che sarà l' integrale completo di quell' equazione coi differenziali parziali; così il piano rappresentato dall' equazione qui trovata soddisfà alla questione.

Per aver l' integrale generale, poniamo $b = fa$, e quest' integrale si otterrà eliminando a da queste due equazioni

$$z = a + xfa + \frac{1 - mfa}{n} y,$$

$$0 = 1 + x\left(\frac{df}{da}\right) - \frac{ym}{n}\left(\frac{df}{da}\right).$$

La seconda di queste equazioni ci mostra che è $a = \phi(nx - my)$, indicando con ϕ una funzione arbitraria della quantità tra le parentesi.

Ridotta poi la prima equazione a questa forma $nz - y = na + (nx - my) fa$, si vede che il secondo membro sarà una funzione arbitraria di $nx - my$, ed in conseguenza avremo $nz - y = \Psi(nx - my)$, equazione che rappresenterà l' integrale generale di quella coi differenziali parziali.

Non vi è poi soluzione particolare; così il problema è solo risoluto dalle due superficie da queste equazioni rappresentate

$$z = a + bx + \frac{1 - mb}{n} y,$$

$$nz - y = \Psi(nx - my).$$

La seconda equazione si riduce facilmente a quella trovata al paragrafo citato.

Se noi facciamo $b = fa$, le due equazioni

$$z = a + xfa + \frac{1 - mfa}{n} y,$$

$nz - y = \Psi(nx - my)$ sono tali

1.° Che la superficie rappresentata dalla seconda equazione è toccata per tutta l' estensione di una linea retta dalle superficie rappresentate dalla prima, vale a dire, da uno di quei piani, da quello, cioè, che si ha dando all' a il valore che soddisfà all' equazione

$1 + x\left(\frac{df}{da}\right) - \frac{ym}{n}\left(\frac{df}{da}\right) = 0$, e che si mantiene costante per tutta l' estensione del piano medesimo;

2.° Che questa linea di contatto è l' intersecazione dei piani rappresentati da queste due equazioni

$$z = a + xfa + \frac{1 - mfa}{n}y,$$

$0 = 1 + x\left(\frac{df}{da}\right) - \frac{ym}{n}\left(\frac{df}{da}\right)$, intersecazione che facilmente si vede essere sempre parallela alla linea data o alla retta generatrice;

3.° Che la superficie espressa dall' integrale completo, cioè la superficie cilindrica, è formata dalle successive e continue intersecazioni che hanno tra loro i piani datici dall' integrale completo facendo variare successivamente il parametro *a*.

Tutto questo risulta da quanto abbiamo detto ai paragrafi antecedenti. E qui faccio osservare che l' analisi stessa maravigliosamente ci spiega la genesi delle superficie cilindriche; di modo che avendole ricavate dalla proprietà del piano tangente, trovata ne abbiamo la maniera di descriverle, che è quella stessa stabilita da principio.

§ 373. Rispetto alle superficie cilindriche, si può cercare l' equazione di quella superficie cilindrica che, generata da una retta data di posizione, abbraccia una superficie data.

Per trovare una tale equazione osservo che la superficie cilindrica e la data superficie si toccheranno in una linea a doppia curvatura; che, determinate l' equazioni di questa linea, il problema sarà ridotto a trovare una superficie cilindrica che passa per una data linea a doppia curvatura, e questo problema è risoluto al § 106.

Sia $F(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie data: è manifesto che questa superficie e la cilindrica avranno lo stesso piano tangente in tutti i punti della linea a doppia curvatura poichè ivi si toccano: se dunque ricaviamo dall' equazione della superficie toccata i valori del $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ e li sostituiamo nell' equazione differenziale delle superficie cilindriche $1 = m\left(\frac{dz}{dx}\right) + n\left(\frac{dz}{dy}\right)$, avremo una equazione tra x, y, z, cioè $f(x, y, z) = 0$, che apparterrà alla curva del contatto. Ora trovandosi questa curva disegnata sopra la superficie data, è buona per essa anche l' equazione di quella superficie; dunque $F(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) = 0$ saranno l' equazioni che determinano la curva a doppia curvatura, dalla quale passar debbe la superficie cilindrica, onde abbracci e tocchi la superficie data.

§ 374. Da ciò che abbiamo detto, risulta che data una equazione di una superficie curva $F(x, y, z, a, fa) = 0$ nella quale a rappresenta un parametro, e fa è una funzione di esso, se supponiamo che a prenda successivamente tutti i valori possibili da $a = \infty$ sino ad $a = -\infty$, si avrà una serie infinita di superficie le quali tutte saranno abbracciate da una superficie comune, la cui equazione è $F(x, y, z, s', fs') = 0$, essendo s' il valore dell' a datoci dall' equazione

$\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0$, ovvero la cui equazione è il risultamento dell' eliminazione del parametro a per mezzo delle due equazioni

(1) . . . . $F(x, y, z, a, fa) = 0$,

(2) . . . . $\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0.$

Questa superficie abbracciante tocca ciascuna delle abbracciate in una linea che è l' intersecazione delle due superficie rappresentate da queste due ultime equazioni (1), (2).

Questa curva di contatto è dal geometra MONGE chiamata la *caratteristica* dell' abbracciante; ed una tal superficie si può risguardare, per dir così, come composta delle infinite caratteristiche, ciascuna delle quali è la curva del contatto tra un' abbracciata e l' abbracciante comune. Se tra le due equazioni (1), (2) si elimina y, si ha un' equazione $\Psi(x, z, a) = 0$, che è la projezione della caratteristica sul piano delle x, z; e se si elimina x, si ottiene un' equazione $\phi(y, z, a) = 0$, che ne è la projezione sopra il piano delle y, z. Dando poi ad a differenti valori, si avranno l' equazioni delle differenti caratteristiche, delle quali parliamo.

§ 375. Se nella curva piana dell' equazione $\Psi(x, z, a) = 0$ facciamo che a prenda successivamente diversi valori, s' avranno diverse curve piane, le quali con le loro successive intersecazioni formeranno un' altra curva. Questa curva avrà la proprietà di toccarle tutte, e sarà l' abbracciante, della quale ciascuna projezione è abbracciata. Lo stesso dicasi per l' altra equazione $\phi(z, y, a) = 0$. L' equazione di un' abbracciante si ha eliminando a dall' equazione dell' abbracciata per mezzo della di lei differenziale presa per rispetto all' a.

Ora siccome due intersecazioni corrispondenti alle stesse coordinate nelle quattro projezioni di due curve a doppia curvatura, danno un punto d' intersecazione di queste due curve; e le tangenti di due projezioni sono anche le projezioni della tangente della curva a doppia curvatura, quindi è che quelle intersecazioni continue delle projezioni delle caratteristiche daranno una continuata intersecazione delle caratteristiche stesse, dalla quale nascerà una curva a doppia curvatura che toccherà tutte le caratteristiche, e sarà la loro abbracciante. Le projezioni

di questa curva poi saranno le due abbraccianti delle projezioni delle caratteristiche; così l' equazioni dell' abbracciante delle caratteristiche saranno

$$\Psi(x, z, a) = 0, \left(\frac{d\Psi}{da}\right) = 0,$$

$$\phi(y, z, a) = 0, \left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0.$$

Eliminando a tra le due prime equazioni, si avrà la projezione dell' abbracciante delle caratteristiche sopra il piano delle x, z; si avrà l' altra projezione facendo lo stesso nelle due ultime equazioni.

Siccome l' equazioni (1), (2) del § antecedente hanno condotto alle altre due $\Psi = 0$, $\phi = 0$, così, in vece delle quattro equazioni qui ritrovate, potremo prendere le suddette (1), (2), ed i loro differenziali relativamente all' a, di modo che scrivendo per maggior comodo $F = 0$, $\frac{dF}{da} = 0$, in vece delle equazioni (1), (2), ed osservando che la differenziazione dell' equazione (1) produce la stessa equazione (2), avremo queste tre equazioni $F = 0$, $\frac{dF}{da} = 0$, $\frac{d^2F}{da^2} = 0$, le quali faranno le veci di quelle quattro, e rappresenteranno l'abbracciante delle caratteristiche.

Eliminando a tra queste equazioni, si hanno l' equazioni di due superficie curve, la cui intersecazione sarà quell'abbracciante. A quest' abbracciante che, come abbiam detto, è formata dalla successiva intersecazione delle caratteristiche, le tocca tutte ed è da tutte toccata, il geometra Monge dà il nome di *arete de rebroussement*, che vale per noi *spigolo di regresso*.

Osserviamo che nell' equazione generale $F = 0$ si trova una funzione fa di un parametro a, e dando

alla funzione forme diverse, si avranno anche superficie abbraccianti diverse, caratteristiche diverse, e spigoli di regresso diversi.

Queste differenti quantità hanno respettivamente delle proprietà comuni le quali ci forniscono l' equazioni da cui queste quantità sono espresse indipendentemente dalla natura della funzione fa. Queste equazioni sono differenziali parziali.

Dichiariamo le dottrine spiegate con un esempio.

§ 376. Supponiamo che nel piano delle x, y sia descritta una curva dell' equazione $b=fa$. In un punto di questa curva siavi il centro di una sfera che abbia per raggio h, e la di lei equazione sarà $(x-a)^2+(y-fa)^2+z^2=h^2$.

Supponiamo che la sfera continuamente si muova, o che il suo centro corra lungo la curva segnata nel piano delle x, y, di modo che il parametro a prenda successivamente diversi valori: il centro della sfera si troverà in diversi punti di questa curva piana, e tutte le sfere andranno successivamente intersecandosi, e comporranno un canale che le abbraccerà o toccherà tutte. L' equazione di questa superficie abbracciante le sfere sarà $(x-s')^2+(y-fs')^2+z^2=h^2$, essendo s' una funzione di x, y, z cui è eguale il valore dell' a ricavato da questa equazione $(x-a)+(y-fa)\left(\frac{df}{da}\right)=0$; ovvero essa è il risultamento della eliminazione dell' a per mezzo di queste due equazioni

(2) . . . . . . $(x-a)+(y-fa)\left(\frac{df}{da}\right)=0$,

(1) . . . . . . $(x-a)^2+(y-fa)^2+z^2=h^2$.

Il sistema di queste due equazioni esprime tutte le superficie curve sottoposte a questa generazione, ma non si può avere l' equazione di una superficie particolare, senza determinare la forma particolare della funzione fa.

Se nell' equazioni (1), (2) non si risguarda più a come una indeterminata che debba sparire con la eliminazione, ma come una costante che debbe rimanere, di modo che le due equazioni (1), (2) non siano più riducibili ad una sola; esse allora determinano la natura e la posizione della caratteristica.

L' equazione (2) è quella di una retta normale alla curva dell' equazione $b = fa$ nel punto ove trovasi il centro della sfera: essa rappresenta anche un piano perpendicolare a quello delle x, y, e che passa dalla suddetta normale. La caratteristica dunque è un circolo massimo della sfera generatrice, ed è in un piano perpendicolare a quello delle x, y. Il canale pertanto abbracciante quelle infinite sfere tocca ciascuna di esse in una linea di contatto ch' è un circolo massimo della sfera, ed il cui piano è perpendicolare alla curva dell' equazione $b = fa$, la quale curva può risguardarsi come l' asse curvilineo dell' abbracciante medesima.

Indichiamo con (3) l' equazione che nasce dal differenziale della (2) riguardo ad a. Se per mezzo delle tre equazioni (1), (2), (3) si elimina a, risguardata come una indeterminata (eliminazione la quale non può eseguirsi che nei casi particolari), si avranno tra x, y, z due equazioni che saranno quelle dello spigolo di regresso. Finchè la forma della funzione f rimane arbitraria, il sistema di quelle tre equazioni rappresenterà lo spigolo di regresso.

Ed ecco come, data l' equazione della sfera generatrice, abbiamo trovate l' equazioni dell' abbracciante, della caratteristica e dello spigolo di regresso. Quest' equazioni contengono la funzione arbitraria da cui dipende il viaggio del centro della sfera generatrice; e siccome sopra questa funzione nulla abbiamo pronunziato, perciò queste equazioni sono generali e adattate a tutte le curve sottoposte alla medesima generazione.

§ 377. Torniamo ora (come abbiamo promesso al § 299) all' integrazione dell' equazioni differenziali elevate fra tre variabili, per le quali non si rettificano le condizioni per renderle integrabili.

Proposta l' equazione $dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2)$ nella quale a è una costante data, io osservo ch' essa appartiene ad una curva a doppia curvatura, a ciascun punto della quale condotta una tangente, questa fa un angolo costante col piano delle x, y; dunque tutte l' equazioni delle rette, le quali fanno lo stesso angolo costante col piano delle x, y, debbono soddisfare alla proposta, qualunque siano d' altronde le direzioni di queste rette: ma sì fatte equazioni sono (B) $x = az + \beta$, (C) $y = z\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - a^2\right)} + \gamma$, a, β, γ essendo tre costanti arbitrarie; dunque il complesso di queste due equazioni prese simultaneamente è una soluzione della proposta, la quale cosa si potrebbe comprovare mercè la differenziazione.

Sebbene il complesso di quelle due equazioni (B), (C) contenga tre costanti arbitrarie, pure egli non è l' integrale completo della proposta, il quale è assai più generale: di fatto, eliminando fra (B) e (C) la costante a, l' equazione che risulta

$(x - \beta)^2 + (y - \gamma)^2 = \frac{z^2}{a^2}$ sarà quella di tutte le superficie coniche, i cui vertici saranno nel piano delle x, y, e i cui lati faranno con questo piano un angolo costante: facciasi $\gamma = \phi(\beta)$, ϕ indicando una funzione arbitraria, e l' equazione

$$(x - \beta)^2 + (y - \phi\beta)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

apparterrà solamente a quelle tali superficie coniche, i cui vertici cadranno in una certa curva, disegnata nel piano delle x, y, essendo $y = \phi(x)$ l' equazione di questa curva; e se si considerano

due superficie curve consecutive, esse si taglieranno in una linea retta, della quale (369) si avrà l'equazione differenziando l'equazione dei coni per rispetto al parametro variabile β; e l'equazioni di questa retta saranno

$$(D) \quad (x-\beta)^2+(y-\varphi\beta)^2=\frac{z^2}{a^2},$$

$$(E) \quad x-\beta+(y-\varphi\beta)\varphi'\beta=0;$$

dunque siccome una tal retta fa ancor essa col piano delle x, y un angolo costante, sarà perciò una di quelle che soddisfaranno all' equazione proposta, e le due equazioni combinate (D), (E) ne formeranno dunque un integrale.

Ma se si considera la successione delle superficie coniche, si avrà una serie di rette compagna alla precedente, le quali non differiranno di situazione che per rispetto al parametro variabile β; e tutte queste rette trovandosi due a due successivamente su di una stessa superficie conica, è giuocoforza che si taglino due a due successivamente, e così formeranno le tangenti di una stessa curva a doppia curvatura: dunque le tangenti di questa curva a doppia curvatura essendo egualmente inclinate al piano delle x, y, una tal curva avrà appunto la proprietà da noi rilevata nella proposta: l'equazioni adunque di questa curva comporranno l'integrale completo della proposta.

L'equazioni di questa curva a doppia curvatura sono date (355) dall'eliminazione del β tra queste tre equazioni

$$(D) \quad (x-\beta)^2+(y-\varphi\beta)^2=\frac{z^2}{a^2},$$

$$(E) \quad x-\beta+(y-\varphi\beta)\varphi'\beta=0,$$

$$(F) \quad -1-(\varphi'\beta)^2+(y-\varphi\beta)\varphi''\beta=0,$$

delle quali la (E) è il differenziale primo della (D) rispetto al β, e la (F) n'è il secondo.

Dunque l' integrale della proposta è il risultamento dell' eliminazione del parametro β fra le tre equazioni (D), (E), (F).

Verifichiamo colla differenziazione questo integrale. Differenziamo le due equazioni (D) ed (E) risguardando β costante, il che si può fare mercè la equazione (F); avremo allora

$$(d) \quad (x-\beta)\,dx + (y-\varphi\beta)\,dy = \frac{z\,dz}{a^2},$$

$$(e) \quad dx + dy \cdot \varphi'\beta = 0;$$

ed eliminando fra le quattro equazioni (D), (E), (d), (e) le tre indeterminate β, $\varphi\beta$, $\varphi'\beta$, si avrà $dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$.

Il verme di una vite, di cui l' asse è perpendicolare al piano delle x, y, è un caso particolare di questo esempio; ed il verme di una vite disegnata sopra una superficie cilindrica a base qualunque e perpendicolare al piano delle x, y, n' è il caso generale.

§ 378. Diciamo ora qualche cosa della relazione che passa fra l' integrazione dell' equazioni per cui non sono soddisfatti i criterj d' integrabilità, e quella dell' equazioni coi differenziali parziali.

Se $U=0$ rappresenta un' equazione coi differenziali parziali del primo ordine, e $M=0$ il di lei integrale completo, il quale contiene un parametro indeterminato a, ed una funzione arbitraria fa di questo parametro, abbiamo veduto che l' integrale generale di $U=0$ è il risultamento dell' eliminazione dell' a tra queste due equazioni

$$M=0, \quad \left(\frac{dM}{da}\right)=0.$$

Di più abbiamo veduto (275) che l' eliminazione dell' a tra queste tre equazioni

$M=0, \left(\frac{dM}{da}\right)=0, \left(\frac{d^2M}{da^2}\right)=0$ ci dà le due equazioni

della curva a doppia curvatura, formata dalle successive intersecazioni di quelle linee, ciascuna delle quali è ancora essa l' intersecazione di due successive superficie curve rappresentate dall' equazione $M=0$.

Sappiamo pure che una curva a doppia curvatura può essere rappresentata da un' equazione differenziale $V=0$ fra tre variabili, per la quale non siano soddisfatti i criterj d' integrabilità: dunque il risultamento dell' a fra queste tre equazioni

$$M=0, \left(\frac{dM}{da}\right)=0, \left(\frac{d^2M}{da^2}\right)=0$$

sarà l'integrale dell'equazione differenziale $V=0$, la quale rappresenta quella curva a doppia curvatura delle mentovate successive intersecazioni.

Ora ogni equazione coi differenziali parziali ha una corrispondente equazione differenziale che da lei dipende come la $V=0$ dipende dalla $U=0$; ed ogni equazione differenziale ha una corrispondente equazione coi differenziali parziali che da lei dipende come $U=0$ dal $V=0$; dunque fra due equazioni in questo modo corrispondenti, l'una coi differenziali parziali, l' altra differenziale a tre variabili per la quale non siano soddisfatti i criterj d' integrabilità, vi è sempre questa proprietà che, conosciuto l' integrale dell' una, si ha subito quello dell' altra. Se è conosciuto l' integrale generale della $U=0$, e se questo è il risultamento dell' eliminazione di a tra due equazioni $M=0$, $\left(\frac{dM}{da}\right)=0$, allora l' integrale completo della $V=0$ è il risultamento dell' eliminazione di a tra queste tre equazioni

$$M=0, \left(\frac{dM}{da}\right)=0, \left(\frac{d^2M}{da^2}\right)=0;$$ e inversamente unite queste tre equazioni per l' integrale della $V=0$, le due prime danno l' integrale della $U=0$.

Se dunque essendo data un' equazione differenziale $V = 0$ si potrà senza conoscerne l' integrale trovare la corrispondente equazione coi differenziali parziali $U = 0$, e inversamente, allora ci potremo applicare ad integrare quella di queste due equazioni che ci presenterà maggior facilità, giacchè si avrà per conseguenza l' integrale dell' altra. In questo modo si può trovare l' integrale di alcune equazioni coi differenziali parziali, le quali non si potrebbero integrare per altre strade, cercando, cioè, gl' integrali delle corrispondenti equazioni differenziali. Io non m' ingolfo in queste dottrine, e mi contento di rimandare i miei lettori ad una Memoria del celebre MONGE inserita negli atti dell' Accademia reale di Parigi del 1784.

CAPO XXI.

Dottrina dei massimi e minimi conosciuta una volta sotto il nome di calcolo delle variazioni.

§ 379. Sia (*Fig.* 22) la curva EF paragonata agli assi ortogonali AB, AB': siano di un qualunque punto M, $AP = x$, $PM = y$ le coordinate; e siano a, b, ecc. i parametri della curva.

Quando è determinata la relazione tra x, y, cioè quando è data un'equazione tra x, y, a, b, ecc., come $f(x, y, a, b, \text{ecc.}) = 0$, tutte le passioni e proprietà della curva, le quali appartengono a ciascuno de' suoi punti, sono anche determinate, poichè esse risguardano quantità rappresentate da funzioni, come $F(x, y, a, b, \text{ecc.})$ di quelle coordinate e dei parametri della curva medesima; anzi qualunque di queste quantità si può considerare come una funzione dell' ascissa x soltanto, che corrisponde al punto cui la stessa proprietà appartiene, subito che per mezzo dell' equazione tra x ed y è in nostro arbitrio eliminare la y da una funzione qualunque che la contenga; così (tralasciando di scrivere

le costanti) da una funzione $F(x)$ sarà rappresentata quella quantità che si conviene ad un punto qualunque M (*Fig.* 22): ogni punto della curva avrà in generale un diverso valore di quella quantità, secondo che sarà diversa la sua ascissa, e la ricerca di quel punto, o la determinazione della ascissa, che corrisponde a quel punto in cui la $F(x)$ perviene al suo massimo o al suo minimo valore, è stato l'oggetto della dottrina dei massimi e dei minimi spiegata al Capo VI del *Calcolo differenziale*.

Al presente noi supponiamo incognita la relazione tra x ed y, e di tutte le infinite relazioni che possono immaginarsi, e ciascuna delle quali rappresenta una delle curve ROS, EMF, HNL, ecc., e ci proponiamo di ritrovare quella di una curva EMF tale, che paragonata essa con qualunque altra delle infinite curve HNL, ROS, ecc., goda in ciascun di lei punto M di una certa proprietà di massimo o di minimo relativamente agli altri punti N, O, ecc. che a quello corrispondono nelle dette curve; vale a dire, indicando per $'y$, y, y' le tre coordinate PN, PM, PO, e rappresentando con $F(x, y)$ una quantità appartenente al punto M nella curva EMF, pel che saranno rappresentate da $F(x, 'y)$, $F(x, y')$ le simili quantità appartenenti ai punti N, O, ecc. nell' altre curve, noi ci proponiamo di trovare quella relazione tra x ed y che rende $F(x, y)$ maggiore o minore di $F(x, 'y)$ e di $F(x, y')$ nel tempo stesso, qualunque d'altronde siano le relazioni tra x ed $'y$, e tra x ed y'.

Così se si dimandasse quale tra tutte le curve ROS, EMF, ecc., è quella in cui per qualunque di lei punto il quadrato dell' ordinata diminuito del rettangolo dell' ascissa nell' ordinata stessa, cioè la quantità $y^2 - xy$, è un *massimo* o un *minimo*, ciò significherebbe che vuolsi avere quella relazione tra x ed y, la cui curva EMF ha la proprietà che in qualunque suo punto M la quantità $(PM)^2 - AP \cdot PM$

è sempre maggiore o minore delle simili quantità $(PO)^2 - AP \cdot PO$, $(PN)^2 - AP \cdot PN$ ecc., appartenenti ai punti N, O, ecc., presi in qualunque delle altre curve, e corrispondenti alla stessa ascissa cui corrisponde il punto M.

La quantità $F(x, y)$ dovendo essere per ciascun punto M della curva EMF massima o minima, relativamente alle altre simili quantità corrispondenti ai punti N, O ecc. nelle altre curve, è manifesto che anche la somma di tutte le quantità $F(x, y)$ appartenenti a tutti i punti possibili E, G, M, F, ecc. della curva EMF, o corrispondenti a tutte le ascisse possibili da C in D, sarà nello stesso tempo maggiore o minore di ciascuna delle somme delle simili quantità $F(x, y')$, $F(x, y'')$ appartenenti a tutti i punti possibili R, g, O, S, ecc., H, h, N, L, ecc., nelle altre curve qualunque ROS, HML, o corrispondenti a tutte le ascisse possibili da C in D.

Ma può essere la somma delle quantità $F(x, y)$ maggiore o minore di quella delle quantità $F(x, 'y)$, senza che per ogni punto G della curva EMF la quantità $F(x, y)$, che ad esso appartiene, sia nello stesso tempo maggiore o minore della quantità $F(x, 'y)$ appartenente al punto g a lui omologo in una qualunque altra curva ROS; imperocchè la somma delle quantità corrispondenti ad un certo tratto di curva EM può esser minore della somma di quelle che convengono al tratto RO omologo di un' altra qualunque curva ROS, e, nulla ostante la somma di tutte le quantità da E in F, superare la somma di quelle da R in S, e ciò per cagione dell' eccesso delle quantità da M in F sopra quelle da O in S, il quale può superare, non che eguagliare, il difetto delle due prime somme; così potrà esservi il massimo o minimo per un intiero arco di curva terminato tra due limiti, mentre questo stesso massimo o minimo può non sussistere per gli elementi od archi che compongono la curva medesima.

Si possono dunque proporre questioni nelle quali le curve cercate goder debbano di una certa proprietà di massimo o di minimo, non in ciascun loro punto, ma per una certa estensione corrispondente a due termini fissi. Si hanno in questa due classi di problemi i quali risolver non si possono mercè le dottrine insegnate al capo qui sopra citato. Nella prima classe la funzione che diventar debbe massima o minima è formata della x, y, e dei differenziali della y rispetto alla x; nella seconda, in questa funzione si trovano quantità integrali, come $\int Mdx$, essendo M funzione delle x, y e dei differenziali.

Spiegata distesamente la natura delle ricerche che siamo per intraprendere, incominciamo dalle cose più semplici di questa dottrina per passare alle più composte.

Si dimandi la relazione ch' esser debbe tra x ed y, perchè la funzione data $F(x, y)$ sia *massima* o *minima*.

Rappresenti $y = \phi(x)$ questa relazione, ed avremo $F\{x, \phi(x)\}$ per esprimere questo massimo o questo minimo: ora supponiamo che quella relazione si muti e divenga $y = \phi(x) + i\omega$, ovvero $y = \phi(x) - i\omega$ (indicando con i una costante indeterminata, e con ω una funzione della x parimente indeterminata), ed avremo le due funzioni $F\{x, \phi(x) + i\omega\}$, $F\{x, \phi(x) - i\omega\}$, le quali dovranno esser maggiori di $F\{x, \phi(x)\}$ nel *minimo*, e minori nel *massimo*, comunque da un altro canto piccola possa prendersi l' indeterminata i: sarà dunque, riponendo y in vece del $\phi(x)$, e scrivendo F in vece di $F(x, y)$, $F(x, y + i\omega) - F(x, y)$ $= i\omega\left(\frac{dF}{dy}\right) + \frac{i^2\omega^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) +$ ec., eguale ad una quantità positiva nel *minimo* e negativa nel *massimo*, e parimente

$$F(x,y-i\omega)-F(x,y)=-i\omega\left(\frac{dF}{dy}\right)+\frac{i^2\omega^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)-\text{ec.}$$

eguale ad una quantità negativa nel *massimo* e positiva nel *minimo*; dunque in virtù di un raziocinio simile a quello fatto al § 57, concluderemo che per determinare il *massimo* od il *minimo* debbe aversi l'equazione $\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$; da questa ricaveremo il valore della y: la funzione $F(x,y)$ è massima se $\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)$ è negativa, ed è minima se positiva.

Per farne un esempio, sia $F(x,y)=y^2-xy$, ed avremo $\left(\frac{dF}{dy}\right)=2y-x=0$, $\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)=0$: dunque tra tutte le linee che possono disegnarsi in un piano, quella nella quale il quadrato di una qualunque sua ordinata diminuito del rettangolo dell'ordinata nell'ascissa è un *minimo*, ha per equazione $2y-x=0$: essa dunque è una linea retta, nella quale le ordinate sono sempre eguali alla metà delle ascisse corrispondenti, e fa con l'asse un angolo di cui la tangente è $\frac{1}{2}$.

§ 380. Supponiamo che la funzione la quale dee divenire massima o minima, contenga x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, sia cioè $F\left\{x,y,\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$, ovvero $F(x,y,p)$, poichè noi d'ora in avanti indicheremo con p la quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Questa quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, la quale può considerarsi come una funzione cognita della x, allorchè

si conosce la relazione tra x ed y, è in questo caso una funzione ancor essa incognita della x come lo era la y: queste due funzioni però sono dipendenti tra loro, e si ottengono l'una dall' altra per mezzo della differenziazione.

Sia $y = \phi(x)$ la relazione la quale rende questa funzione massima o minima, ed avremo $p = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)$; così il massimo o minimo sarà $F\left\{x, \phi, \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}$. Quando ϕ, sostituito in vece della y, rende la funzione massima o minima, se poniamo $\phi + i\omega$, ovvero $\phi - i\omega$ in vece della y, e perciò $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ in vece del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, le due funzioni che indi derivano

$$F\left\{x, \phi + i\omega, \left(\frac{d\phi}{dx}\right) + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\},$$

$$F\left\{x, \phi - i\omega, \left(\frac{d\phi}{dx}\right) - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\}$$

debbono essere minori di $F\left\{x, \phi, \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}$ nel *massimo*, e maggiori nel *minimo*, comunque piccola possa prendersi la costante i; dunque (tenendo y in vece del ϕ) le differenze

$$F\left\{x, y + i\omega, p + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} - F(x, y, p),$$

$$F\left\{x, y - i\omega, p - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} - F(x, y, p)$$

debbono essere positive pel *minimo* e negative pel *massimo*.

Queste differenze sviluppate in serie secondo le potenze dell'i per mezzo delle formole del § 43, sono

$$+ i \left\{ \omega \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dp}\right) \right\} + \frac{i^2}{2} \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) \right.$$

$$\left. + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2F}{dy\,dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) \right\}$$

$$+ \frac{i^3}{2 \cdot 3} \left\{ \omega^3 \left(\frac{d^3F}{dy^3}\right) + \text{ecc.} \right\} + \text{ecc.}$$

$$- i \left\{ \omega \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dp}\right) \right\} + \frac{i^2}{2} \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) \right.$$

$$\left. + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2F}{dy\,dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) \right\}$$

$$- \frac{i^3}{2 \cdot 3} \left\{ \omega^3 \left(\frac{d^3F}{dy^3}\right) + \text{ecc.} \right\} + \text{ecc.},$$

e debbono essere negative nel *massimo* e positive nel *minimo*.

Affinchè ciò succeda per qualunque valore della i, bisogna che i coefficienti della prima potenza della i si annullino da sè medesimi, e che quei della seconda siano negativi nel *massimo* e positivi nel *minimo*: l'equazione dunque che debbe darci il *massimo* o il *minimo* sarà

$$(a) \quad \ldots\ldots \quad \omega \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dp}\right) = 0.$$

Avremo il *massimo* quando il coefficiente dell'i^2 sarà negativo, ed il *minimo* se sarà positivo.

Ora l'equazione (a) dovendo esser vera per qualunque valore della ω, è necessario che i diversi termini della medesima si annullino da sè stessi;

avremo perciò $\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dp}\right)=0$: queste due equazioni non possono sussistere nello stesso tempo senza che esse non abbiano un fattor comune, funzione delle x, y e p, il quale, eguagliandosi a zero, vi soddisfaccia simultaneamente, o senza che l'una di esse dipenda e nasca dall' altra in qualunque modo si sia. Fuori di questi casi, determinata, in virtù della prima equazione, la relazione tra x ed y, resta anche determinata quella tra p e x, la quale in generale non soddisfarà alla seconda equazione $\left(\frac{dF}{dp}\right)=0$: dunque non si può generalmente risolvere questo problema quando si voglia che il *massimo* o il *minimo* siano appartenenti alle due funzioni variabili y e p.

Per questo ci contenteremo di ricercarlo per la y o pure pel p, ed avremo in questa guisa due soluzioni del problema: la relazione allora per determinare y in x ci sarà data dall' equazione $\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$ ovvero $\left(\frac{dF}{dp}\right)=0$, secondo che avremo cercato il *massimo* o il *minimo* relativamente alla y od alla p. Vi sarà il *massimo* rispetto alla y se $\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)$ sarà negativa, ed il *minimo* nel caso opposto; e relativamente al p, il *massimo* ed il *minimo* dipenderanno dall' essere $\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)$ quantità negativa o positiva.

§ 381. A schiarimento di queste dottrine aggiungeremo che, allora quando le due equazioni $\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dp}\right)=0$ sussistono nello stesso tempo,

perchè si trovano in uno dei due casi qui sopra menzionati, la curva trovata avrà quella dimandata proprietà del *massimo* o del *minimo* a preferenza di tutte le altre le quali per una medesima ascissa hanno diverse ordinate, e di cui le tangenti fanno coll' asse dell' ascisse diversi angoli.

§ 382. Se poi quelle due equazioni non sussistono insieme, ciò significa che il problema non può risolversi per mezzo di una curva la quale, confrontata con qualunque altra curva, abbia in un qualunque di lei punto l' ordinata diversa, e diversa pure per la direzione della tangente, da quelle che nel punto omologo ha una qualunque altra curva; così, data la funzione $F(x, y, p)$, se si cerca la relazione tra x ed y che rende la proposta funzione *massima* o *minima*, e che le due equazioni

$\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{dp}\right) = 0$ non riducansi ad una sola,

si potrà soddisfare al quesito o supponendo che nella funzione aumenti la sola y e resti costante il p, ovvero supponendo che aumenti il solo p e costante resti l' ordinata y. Nel primo caso la curva che risolve il problema, si paragona a quelle altre infinite curve che per una medesima ascissa hanno diverse ordinate, ma però le stesse direzioni delle tangenti corrispondenti a queste diverse ordinate medesime: e nel secondo, la curva che si cerca godrà della voluta proprietà, paragonata però a quelle altre infinite curve le quali passano tutte pel medesimo punto corrispondente alla medesima ordinata y, e di cui gli angoli fatti dalle respettive tangenti con l' asse sono diversi in ciascuna. Quindi è che nel primo di questi due casi variando solamente la y, l' equazione $\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$ risolverà il problema, e nell' altro variando solamente il p, l' equazione $\left(\frac{dF}{dp}\right) = 0$ risolverà il problema.

§ 383. Risolviamo alcuni problemi. Si dimandi (*Fig.* 23) la curva EF tale che condotta in un qualunque di lei punto M la tangente TMt che incontri in T e t due ordinate corrispondenti alle ascisse $AB = m$, $AC = n$ prolungate se sia bisogno, il prodotto delle porzioni TB, tC, intercette tra l' asse e la tangente, sia un *massimo* o un *minimo*.

Chiamando α e β le coordinate della tangente Tt, abbiamo trovata al (§ 79) la di lei equazione $\beta = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\alpha$; dunque facendo in essa $\alpha = m$, $\alpha = n$, avremo

$$TB = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + m\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$tC = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + n\left(\frac{dy}{dx}\right)$$, e perciò sarà

$$\left\{y + (m - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}\left\{y + (n - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$$ ovvero $\{y + (m - x)p\}\{y + (n - x)p\}$ la quantità che debb' essere massima o minima.

Ora secondo ciò che abbiamo detto qui sopra, possiamo prendere il *massimo* o il *minimo* per rispetto all' una o all' altra delle due quantità y e p.

Prendiamolo rispetto alla variabile p, che dà la direzione della tangente, e le due coordinate x, y saranno allora risguardate come date per ciascun punto della curva.

Indichiamo con F la quantità che dee divenir massima, ed avremo

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) = \{y + (n-x)p\}(m-x) + \{y + (m-x)p\}(n-x) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) = 2(m-x)(n-x).$$

La prima equazione ci darà la cercata relazione tra x ed y; che sarà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(2x - m - n)y}{2(m - x)(n - x)}$. La seconda ci dice che trovasi il *massimo* in tutta la porzione di curva, per la quale le due quantità $m - x$, $n - x$ hanno segni differenti, e che trovasi il *minimo* quando queste hanno lo stesso segno; di modo che il *massimo* ha luogo per tutt' i valori della x compresi tra i limiti m, n, ed il *minimo* per quei valori della x, i quali cadono fuori di quei limiti.

L'equazione poi $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(2x - m - n)y}{2(m - x)(n - x)}$ si riduce a $2\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x - m} + \frac{1}{x - n}$, il cui integrale è $2\log y = l(x - m) + l(x - n) + lC$, ovvero, passando dai logaritmi ai numeri, $y^2 = C(x - m)(x - n)$, essendo C una costante arbitraria: questa sarà l'equazione della curva $ENMF$, la quale avrà quella proprietà del *massimo*.

§ 384. Al § 117 veduto abbiamo come data una superficie, e su di essa descritta una curva qualunque, si possa trovare il raggio di una sfera che sia osculatrice di questa curva: ora supponendo incognita questa curva media, proponiamoci di determinarla in tal guisa che il valore del raggio della sfera osculatrice sia un *massimo* o *minimo*.

Indicando con h, come facemmo a quel citato paragrafo, il cercato raggio della sfera, rammentiamo che il valore della h è una funzione della x, y e del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$; che il valore della y e del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ sono due funzioni conosciute della x quando è conosciuta la curva osculata, e sconosciute quando è sconosciuta questa curva medesima. Noi dunque dobbiamo determinare la relazione che passa tra y e x, onde quel

valore della h sia *massimo* o *minimo*. Cerchiamo questo *massimo* o questo *minimo* rispetto al $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

A quel paragrafo si trova

$$h = (z - c)\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}},$$

ove c rappresenta l' ordinata del centro della sfera; dunque il *massimo* o *minimo* della h corrisponde al *massimo* o *minimo* del c; se dunque si prende il differenziale primo, rispetto a $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, dell' equazione che trovasi tra c e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ in quel paragrafo, la quale è

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^2 + \left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}(z - c) = 0,$$

ed eguagliamo a zero il valore del $\left(\frac{dc}{dp}\right)$, avremo l' equazione

$$(e) \ldots\ldots \left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}$$
$$+ \left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}(z - c) = 0,$$

la quale, combinata con l' equazione medesima da cui è stata ricavata, servirà a determinare $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e la coordinata c.

Di fatto, moltiplicando l'equazione (e) per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e sottraendola dall'altra, otteniamo quest' equazione più semplice

$$(f) \ldots\ldots 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)$$
$$+ \left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\right\}(z-c) = 0;$$

e mercè di questa e della medesima (e) eliminato $z-c$, si ottiene un' equazione dalla quale si ricava il valore del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ch' è di questo tenore:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) - C = 0, \text{ ove}$$

$$A = \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

$$B = \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

$$C = \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right);$$

risolvendo poi quest' equazione, si trova

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{B \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2A}$; questa è una equazione differenziale del primo ordine tra x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, poichè z è una funzione della x e della y dataci dalla equazione della superficie toccata. L' integrale completo di quell' equazione differenziale conterrà, come è di dovere, una costante arbitraria, e rappresenterà una infinità di curve, le quali saranno le projezioni delle linee della massima e minima curvatura appartenenti a tutt' i punti di una data superficie.

§ 385. Per avere adesso il valore del raggio, fa di mestieri sostituire il valore del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ nell'espressione del raggio medesimo; ma si può trovare anco così:

Moltiplicata l'equazione (e) per $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, da essa si tolga l'altra equazione (f) moltiplicata per $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, e dal residuo si cavi il valore del $z-c$: avremo allora

$$z-c=\frac{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)-A\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2-\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)};$$

ove sostituendo il valore del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e facendo

$$E=\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+\left\{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

$$+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),$$ avremo

$$z-c=\frac{E\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right\}},$$ e quindi

$$h=\frac{\left\{E\pm\sqrt{(B^2+4AC)}\right\}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}}{2\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right\}},$$

dal che si rileva che il doppio segno del radicale ci dà per h due valori, *massimo* l'uno, *minimo* l'altro.

Dunque in ciascun punto di una superficie curva sonovi due rami che si segano, e corrispondono l'uno alla linea della *massima* curvatura, l'altro a questa della *minima*, e l'angolo con cui si tagliano, dipende dal doppio valore del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, il quale eguaglia la tangente dell'angolo formato con l'asse delle x dalla tangente della projezione sopra il piano delle x, y.

Ora la projezione di questo piano essendo arbitraria, possiamo determinarla in tal guisa, che esso divenga parallelo al piano tangente: allora le due tangenti delle projezioni diverranno parallele alle tangenti dei due rami della *massima* e *minima* curvatura; quindi l'angolo col quale si segano le tangenti delle projezioni eguaglierà quello col quale si segano le tangenti dei detti due rami. Se dunque indichiamo con α, β i due valori del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, essendo l'angolo di cui si tratta la differenza tra gli angoli che quelle due tangenti fanno con lo stesso asse delle x, la trigonometria c'insegna che la di lui tangente è $\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}=\frac{\sqrt{(B^2+4AC)}}{A-C}$.

Affinchè poi il piano tangente di una superficie sia parallelo al piano delle x, y, conviene che $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ siano nulli: avremo allora

$$A=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),\ B=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ C=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),$$

ciò che dà $A-C=0$: questa tangente dunque sarà infinita.

Di qui si ricava una bellissima proprietà delle linee della *massima* e *minima* curvatura: *Tali curve si segano sempre ad angolo retto.*

Un' altra singolare proprietà di queste curve è ch' esse sono la sviluppante della loro curva dei centri di curvatura, questa essendone la sviluppata; e che in una superficie qualunque le sole linee della *massima* e della *minima* curvatura sono quelle che hanno una sviluppata formata dai raggi di curvatura. Non ci fermiamo a dimostrare queste proprietà, e rimandiamo i lettori all' opera: *Applicazione dell' analisi alla generazione delle superficie curve*, del C. Monge.

§ 386. Di tutte le curve (*Fig.* 22) HL, EF, RS ec., i di cui estremi corrispondono alle stesse ascisse $AC = a$, $AD = b$, cerchiamo quella per la quale $\int \Psi dx$ è *massimo* o *minimo*, essendo Ψ una funzione della x e della y.

Indicando con $\Psi(x, y)$ o semplicemente con Ψ questa funzione, si dimanda la relazione tra x ed y, la quale fa sì che l' integrale $\int \Psi dx$ sia *massimo* o *minimo*, preso quest' integrale da $x = a$ sino a $x = b$, cioè supponendo ch' egli sia nullo quando $x = a$, e *massimo* o *minimo* quando $x = b$.

Se noi indichiamo con $y = \phi(x)$ la cercata relazione, sarà $\int \Psi \{x, \phi(x)\} dx$ il *massimo* o *minimo*; facendo pertanto $y = \phi + i\omega$, $y = \phi - i\omega$, le due quantità

$\int \Psi (x, \phi + i\omega) dx$

$\int \Psi (x, \phi - i\omega) dx$ saranno nello stesso tempo maggiori di $\int \Psi (x, \phi) dx$ nel *minimo*, e minori nel *massimo*; dunque le due differenziali

$\int \Psi (x, y + i\omega) dx - \int \Psi (x, y) dx$

$\int \Psi (x, y - i\omega) dx - \int \Psi (x, y) dx$

saranno negative nel *massimo*, e positive nel *minimo*.

Sviluppiamo in serie queste differenze secondo le potenze dell' i, ed avremo le serie

$$i\int\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)dx + \frac{i^2}{2}\int\omega^2\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)dx + \text{ecc.}$$

$$-i\int\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)dx + \frac{i^2}{2}\int\omega^2\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)dx - \text{ecc.},$$

le quali, sebbene siano composte di un numero infinito di termini, possono però ridursi a finire ove si vuole per mezzo delle formole atte a calcolare i resti date al § 42.

Siccome possiam dare all' i un valore così piccolo come ci piace, così (§ 57) potremo sempre ridurlo tale che i due primi termini

$i\int\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)dx$, $-i\int\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)dx$ superino la somma di tutti quelli che seguono nelle respettive serie, e che per conseguenza ciascuna di quelle serie sia positiva o negativa, se è positivo o negativo il suo primo termine: ora di quei due termini, l'uno è necessariamente positivo, l' altro necessariamente negativo; dunque se in vece della y consideriamo aver sostituita quella funzione della x che soddisfà al *massimo* o *minimo*, debbono necessariamente annullarsi quei due primi termini, giacchè senza questo le due serie non sarebbero insieme negative ed insieme positive; dunque perchè vi sia il *massimo* o *minimo*, dovremo avere $\int\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)dx = 0$ prendendo l' integrale da $x = a$ sino a $x = b$, qualunque valore d' altronde voglia darsi all' ω.

Converrà poi che l' integrale $\int\omega^2\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)dx$ sia una quantità negativa nel *massimo*, positiva nel *minimo*; il tutto conforme alle teorie dei §§ 57 e seguenti.

La prima di queste condizioni ci dà $\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = 0$, da cui si ricava l' equazione della curva cercata; e la seconda è adempita, se ridotta la quantità $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ ad essere una funzione della sola x, rimane essa positiva per tutt' i valori della x compresi tra i limiti $x = a$, $x = b$, ovvero negativa per tutti quei medesimi valori. Questa regola meglio si comprenderà dopo il lemma che spiegheremo al § 398.

Se dando alla x tutt' i valori possibili da $x = a$ sino ad $x = b$, i valori di $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ passeranno dall' essere positivi all' essere negativi e inversamente, allora nel pezzo di curva da noi voluto vi sarà il *massimo* ed il *minimo*: vi sarà il *massimo* per la porzione di quel pezzo ove quei valori saranno negativi, ed il *minimo* ove saranno positivi.

§ 387. Facciamo a maggiore schiarimento qualche esempio.

Si cerca la curva, la quale tra tutte le curve, i cui termini corrispondono alle stesse ascisse, abbia il valore della formola

$\int \{ a'x - yy \} y dx$ *massimo* o *minimo*.

Avremo in questo caso $\Psi = (a'x - yy)y$; dunque $\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = a'x - 3y^2 = 0$, e l' equazione cercata sarà $y^2 = \frac{1}{3} a'x$.

La curva pertanto sarà una parabola apolloniana.

Ad indagare se vi è il *massimo* o *minimo*, prendiamo il valore del $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$, ed avremo

$\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) = -6y = -6\sqrt{\left(\frac{1}{3} a'x\right)}$; dunque essendo

$\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ sempre negativo concluderemo che ha luogo il *massimo*.

Per un altro esempio dimandiamo la curva nella quale il valore della formola

$\int(15a'^2x^2y - 15a'^3xy + 5a'^2y^3 - 3y^5)\,dx$ è *massima* o *minima*.

Sarà $\Psi = 15a'^2x^2y - 15a'^3xy + 5a'^2y^3 - 3y^5$: avremo

$$\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = 15a'^2x^2 - 15a'^3x + 15a'^2y^2 - 15y^4$$
$$= 15(a'x - y^2)(a'x + y^2 - a'^2) = 0.$$

Il primo membro di quest' ultima equazione essendo composto di due fattori, potremo in due modi soddisfare al problema, e la curva cercata sarà o quella data dall' equazione $yy = a'x$, o l' altra rappresentata dall' equazione $y^2 = a'^2 - a'x$. Ciascuna poi di queste curve esprime una parabola apolloniana.

Considerando la prima curva, noi abbiamo

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) = 15(2a'^2y - 4y^3) = 30 \cdot a'\sqrt{(a'x)} \cdot (a' - 2x);$$

la quantità $(a' - 2x)a'\sqrt{(a'x)}$ essendo positiva per tutt' i valori della x da $x = 0$ sino ad $\frac{a'}{2}$, e negativa per tutt' i valori al di là di $\frac{a'}{2}$, ne concluderemo esservi il *minimo* in quei pezzi della curva compresi tra i termini $x = 0$, $x = \frac{a'}{2}$, ed il *massimo* in quei situati al di là dell' ascissa $\frac{a'}{2}$.

Per la seconda curva si ha

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) = 30\,(a'^2y - 2y^3) = -30\sqrt{(a'^2 - a'x)}\cdot a'(a' - 2x),$$

e si vede che da $x = 0$ sino a $x = \frac{a'}{2}$ abbiamo il *massimo*; da $x = \frac{a'}{2}$ sino ad $x = a'$ si ha il *minimo*; e per tutti i valori della x, minori del zero, abbiamo sempre il *massimo*.

S' avverta che la quantità a' si è considerata positiva.

§ 388. Di tutte le curve (*Fig.* 22) HL, EF, RS, ec., i cui punti estremi corrispondono alle stesse ascisse $AC = a$, $AD = b$, proponiamoci di trovare quella EF, per la quale la quantità $\int \Psi dx$ è un *massimo* o *minimo*, essendo Ψ una funzione conosciuta della x, y, $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Questo problema potrebb' enunciarsi algebraticamente così: indicando con $\Psi\,(x, y, p)$ o semplicemente con Ψ una funzione della x, y e p, si dimanda la relazione tra x ed y, onde l' integrale $\int \Psi dx$ sia un *massimo* o *minimo* prendendo quest' integrale da $x = a$ sino ad $x = b$, cioè supponendo ch' egli sia nullo quando $x = a$, e divenga un *massimo* o *minimo* quando $x = b$.

Se noi indichiamo con $y = \phi\,(x)$ la cercata relazione, sarà $\int \Psi \left\{ x, \phi, \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \right\} dx$ il *massimo* o *minimo*, facendo pertanto $y = \phi + i\omega$, $y = \phi - i\omega$, le due quantità

$$\int \Psi \left\{ x, \phi + i\omega, \left(\frac{d\phi}{dx}\right) + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} dx$$

$$\int \Psi \left\{ x, \phi - i\omega, \left(\frac{d\phi}{dx}\right) - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} dx$$

dovranno essere nello stesso tempo maggiori di
$\int \Psi \left\{ x, \phi, \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \right\} dx$ nel *minimo*, e minori nel *massimo*; dunque (pongo y in vece del ϕ) le due differenze

$$\int \Psi \left(x, y + i\omega, \left(\frac{dy}{dx}\right) + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} dx - \int \Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} dx$$

$$\int \Psi \left(x, y - i\omega, \left(\frac{dy}{dx}\right) - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} dx - \int \Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} dx$$

saranno negative pel *massimo*, e positive pel *minimo*.

Sviluppiamo in serie queste differenze, ed avremo, indicandole con D, D',

$$D = i \int \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) \right\} dx$$
$$+ \frac{i^2}{2} \int \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dy\,dp}\right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) \right\} dx$$
$$+ \frac{i^3}{2\cdot3} \int \left\{ \omega^3 \left(\frac{d^3\Psi}{dy^3}\right) + 3\omega^2 \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^3\Psi}{dy^2\,dp}\right) + \text{ec.} \right\} dx$$
$$+ \text{ecc.}$$

$$D' = - i \int \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) \right\} dx$$
$$+ \frac{i^2}{2} \int \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dy\,dp}\right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) \right\} dx$$
$$- \frac{i^3}{2\cdot3} \int \left\{ \omega^3 \left(\frac{d^3\Psi}{dy^3}\right) + 3\omega^2 \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^3\Psi}{dy^2\,dp}\right) + \text{ec.} \right\} dx$$
$$+ \text{ecc.}$$

Ora queste due serie prendono le forme

$$Ai + Bi^2 + Ci^3 + \text{ecc.}$$

$$-Ai + Bi^2 - Ci^3 + \text{ecc.},$$

le quali, sebbene siano composte di un numero infinito di termini, possono però ridursi a finire ove si vuole per mezzo delle formole dei resti, date al § 42.

Dunque col medesimo discorso fatto al § 386 proveremo che fintanto che vi si troveranno i primi termini di quelle serie, potrem prendere i così piccolo ch' essi superino le somme di tutti quei che li seguono, per la qual cosa le due serie avranno necessariamente segni contrarj; non potranno dunque quelle serie essere ambedue positive o ambedue negative se non si annullano i coefficienti della prima potenza dell' indeterminata i. Si proverà di più che vi sarà il *massimo* quando il coefficiente della seconda potenza sarà negativo, ed il *minimo* nel caso opposto: dunque il *massimo* sarà dato dalle due equazioni $A = 0$, $B =$ ad una quantità negativa, ed il *minimo* dà $A = 0$, $B =$ ad una quantità positiva.

Il tutto succede come nei problemi ordinarj dei *massimi* e dei *minimi*.

Perchè siavi il *massimo* o il *minimo*, abbiamo dunque l'equazione

$$\int \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) \right\} dx = 0;$$

e soddisfatta questa, debbe la quantità

$$\int \left\{ \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + \omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dy\,dp}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) \right\} dx$$

esser positiva nel *minimo*, e negativa nel *massimo*, qualunque valore voglia darsi all' ω, facendo però sempre le integrazioni da $x = a$ sino ad $x = b$.

§ 389. Poniamo $d\Psi = Mdx + Ndy + Pdp$, e sarà

$$M = \left(\frac{d\Psi}{dx}\right),\quad N = \left(\frac{d\Psi}{dy}\right),\quad P = \left(\frac{d\Psi}{dp}\right).$$

Per soddisfare alla prima condizione, supponiamo che sia $f\left\{\omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\}dx = \alpha + \beta\omega$, essendo α e β due funzioni della x, della y e del p da determinarsi: differenziamo quest' equazione, ed avremo $N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)\omega + \beta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, che ci darà tra i due coefficienti indeterminati α e β queste tre equazioni $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0$,

$$\left(\frac{d\beta}{dx}\right) = N,$$

$$\beta = P.$$

Avendo due quantità da determinare, e tre equazioni, troveremo un' equazione di condizione, la quale debbe da per sè medesima sussistere, acciò questa determinazione abbia luogo; tale equazione ci sarà data eliminando β per mezzo della seconda e della terza equazione; avremo pertanto

$$\alpha = C \text{ costante}$$

$$\beta = P$$

$$(a) \ldots\ldots\ N - \frac{1}{dx}\,dP = 0.$$

L' ultima equazione è quella di condizione, la quale stabilisce la relazione tra le quantità N e P, ed in conseguenza tra x ed y, acciò la formola $f\Psi dx$ possa divenir massima o minima. Presa a capriccio una relazione tra x ed y, e determinati in virtù di essa

i valori della N e del P, si può vedere se abbiamo indovinata quella relazione che rende la formola $\int \Psi dx$ *massima* o *minima*, esaminando se l'equazione (a) è soddisfatta in virtù di tal relazione. Inversamente non conoscendosi la relazione tra y ed x, questa ci sarà data dall' equazione (a).

§ 390. L' equazione dunque della curva che gode quella proprietà del *massimo* o del *minimo*, sarà $N - \frac{dP}{dx} = 0$; quest' equazione è, generalmente parlando, un' equazione differenziale del second' ordine; il suo integrale dunque conterrà due costanti arbitrarie, per mezzo delle quali potrem soddisfare a due condizioni: ho detto *generalmente parlando*, poichè se la funzione Ψ non conterrà p elevato a dimensioni maggiori della prima, l' equazione $N - \frac{dP}{dx} = 0$ sarà del primo ordine.

Ma perchè effettivamente la curva goda la proprietà del *massimo* o del *minimo*, bisogna che il valore $C + P\omega$ dell' integrale $\int \left\{ \omega N + \left(\frac{d\omega}{dx}\right) P \right\} dx$ preso tra i limiti $x = a$, $x = b$, sia nullo; per questo, supponiamo rappresentata da Ω la quantità $P\omega$, e sarà $C + \Omega$ quella espressione che debb' esser nulla da $x = a$ sino a $x = b$: sia dunque A il valore di Ω quando $x = a$, e B quello della stessa Ω quando $x = b$, ed avremo le due quantità $C + A$, $C + B$ delle quali la differenza dovrà essere nulla: dovremo avere pertanto $B - A = 0$.

A quest' ultima equazione soddisfaremo per mezzo delle costanti arbitrarie ch' entreranno nell' espressione dell' y, data dall' equazione della curva del *massimo*, avendo nello stesso tempo riguardo alle condizioni speciali del problema.

Così, per esempio, se il valore della y corrispondente al principio ed alla fine dell' integrale, ove le ascisse sono $x=a$, $x=b$, è dato, allora il valore dell' ω che n' è l' aumento, sarà nullo nelle due quantità A e B, e l' equazione $A-B=0$ resta soddisfatta da sè medesima.

Si dice poi che il valore della y è dato per mezzo delle due ascisse $x=a$, $x=b$, quando la curva, per la quale avvi il *massimo* o *minimo*, termina in due punti fissi, dei quali son conosciute le coordinate; o quando deve incontrare due altre date curve nei punti corrispondenti alle ascisse $x=a$, $x=b$, giacchè allora le ordinate y che corrispondono a questi punti, sono funzioni delle a e b somministrateci dall' equazioni di quelle curve.

§ 391. Dati due punti M, N, cercasi la linea più corta di tutte quelle che si possono far passare pei medesimi due punti.

La dottrina delle rettificazioni (§ 97) delle curve ci dà per la lunghezza di un arco qualunque la formola $\int dx \sqrt{(1+pp)}$, prendendo quest' integrale da un capo all' altro dell' arco; la quantità dunque che dovrà divenir *minima*, sarà $\int dx \sqrt{(1+pp)}$, ed i termini dell' integrale corrispondono alle ascisse AD, AC.

Facciamo pertanto $\Psi=\sqrt{(1+pp)}$, ed avremo

$d\Psi=\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}dp$: l' equazione dunque che dar ci debbe la relazione pel *minimo*, e che generalmente è $N-\frac{1}{dx}dP=0$, diviene nel nostro caso $dP=0$, e perciò $P=cost.$

Essendo $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}=cost$, anco lo stesso p sarà eguale ad una costante arbitraria n; dunque $p=n$ sarà l' equazione differenziale della linea del *minimo*.

Quest' equazione ci dà $y = nx + m$, ove m è un' altra costante arbitraria; dunque la linea retta rappresentata dall' equazione $y = nx + m$ sarà la linea brevissima.

Questo *minimo* poi sarà

$$\int dx \sqrt{(1+pp)} = \int dx \sqrt{(1+nn)} = C + x\sqrt{(1+nn)}$$
$$= x\sqrt{(1+nn)} - a\sqrt{(1+nn)},$$

giacchè si determina la costante in guisà ch' egli svanisca quando $x = a$. Facciamo dunque $x = b$, e si avrà $\sqrt{(1+nn)} \cdot (b-a)$ per esprimere quella minima distanza. Assoggettiamola ora alle condizioni di passare pei punti M e N.

Siano a, α le coordinate AD, DM che determinano la situazione del punto M; siano b, β quelle pel punto N; l' equazione $B - A = 0$, che, come abbiamo detto al paragrafo antecedente, debb'essere soddisfatta, è nel nostro caso

$$\frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}\,\omega'' - \frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}\,\omega' = 0,$$

essendo ω'', ω' i valori dell' ω alla fine ed al principio dell' integrale. Ora dovendo la linea passare pei due punti fissi, queste due quantità ω', ω'' sono nulle da sè medesime; dunque l'equazione $B - A = 0$ è soddisfatta da sè stessa. Le due costanti m e n rimangono adunque indeterminate; se però facciamo nell' equazione della curva $x = a$, $x = b$, siccome allora dobbiamo ottenere $y = \alpha$, $y = \beta$, così avremo queste due equazioni $\alpha = na + m$, $\beta = nb + m$, dalle quali si ricaverà $n = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$, $m = \frac{\alpha b - a\beta}{b - a}$, ed allora la nostra equazione per la linea del *minimo* sarà $y = \frac{\beta - \alpha}{b - a}\,x + \frac{\alpha b - a\beta}{b - a}$, nella quale tutto è determinato.

Il valore poi della minima distanza MN sarà

$$(b-a)\cdot\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right)^2\right\}}=\sqrt{\{(b-a)^2+(\beta-\alpha)^2\}};$$

il che già si sa dalle proprietà del triangolo rettangolo.

Se non fosse prescritta la condizione di passare per due punti dati, allora l' equazione $B-A=0$ ci darebbe (*Fig.* 24) $\frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}=0$, ovvero $n=0$, il che dice che la linea della più corta distanza corrispondente ai punti D, C è una qualunque parallela all' asse che ha per equazione $y=m$, la qual cosa è di sua natura evidente.

In generale osserviamo che la curva nella quale $\int\Psi dx$ debb' essere *massima* o *minima*, è sempre una linea retta, se Ψ è una funzione soltanto del p.

§ 392. Proponiamoci lo stesso problema sotto un aspetto però più generale.

Dati di posizione in un piano e la linea retta FG ed il circolo NHL, trovare la più corta distanza tra essi. C' insegna la Geometria elementare che questa minima distanza si ottiene abbassando dal centro del circolo una perpendicolare sopra la retta: troviamo lo stesso risultamento col metodo dei *massimi* e dei *minimi.*

Sia l' equazione della retta $s=et$, e quella del circolo $(z-m)^2+(u-n)^2=r^2$, essendo m, n le coordinate del centro e r il raggio.

Supponiamo che si prendano due punti M e N, l'uno nella retta e l' altro nel circolo, e che risguardati come punti dati di posizione, si cerchi la *minima* distanza tra loro: questa l' abbiam trovata nel paragrafo antecedente, ed è
$\sqrt{\{(b-a)^2+(\beta-\alpha)^2\}}$, essendo $a=FD$, $b=FC$, $\alpha=DM$, $\beta=NC$.

Trovandosi il punto M nella linea, e N nel circolo, sarà

$\alpha = ea$, $\beta = m \pm \sqrt{\{r^2 - (b-n)^2\}}$, e perciò $(\beta - \alpha)^2 = \{m - ea \pm \sqrt{[r^2 - (b-n)^2]}\}^2$; sarà dunque

$$MN = \{(b-a)^2 + [m - ea \pm \sqrt{(r^2 - (b-n)^2)}]^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Per due altri punti M', N' si troverà una simile espressione della distanza M' N', ponendo in quella trovata per MN, in vece dell' a e del b, i valori delle ascisse corrispondenti ai punti M', N'.

Per risolvere il nostro problema, bisogna tra tutte le distanze MN, $M'N'$, ecc. trovare quella che è la *minima*.

Questa distanza MN essendo una funzione conosciuta delle due variabili a, b, ne determineremo il *massimo* o il *minimo* relativamente a ciascuna di quelle variabili, con le regole ordinarie insegnate ai §§ 57 e seguenti.

Siccome poi quando è *minima* la distanza MN, è anche *minimo* il di lei quadrato, così cercheremo il *minimo* della funzione

$$(b-a)^2 + \{m - ea \pm \sqrt{[r^2 - (b-n)^2]}\}^2.$$

A tenore delle regole suddette, facendo questa quantità eguale a z, s'avrà

$$\left(\frac{dz}{da}\right) = b - a + e\{m - ea \pm \sqrt{[r^2 - (b-n)^2]}\} = 0,$$

$$\left(\frac{dz}{db}\right) = b - a - \{m - ea \pm \sqrt{[r^2 - (b-n)^2]}\} \times$$

$$\frac{b-n}{\pm\sqrt{\{r^2 - (b-n)^2\}}} = 0.$$

Questa seconda equazione si riduce a quest'altra

$$\frac{\pm(b-a)\sqrt{\{r^2-(b-n)^2\}}}{b-n} - m - ea \pm \sqrt{[r^2 - (b-n)^2]} = 0;$$

e da queste due equazioni si ricava

$$1 \pm \frac{e\sqrt{\{r^2 - (b-n)^2\}}}{b-n} = 0,$$

$$\pm\sqrt{\{r^2-(b-n)^2\}}=-\frac{(b-n)}{e},$$

$$(b-n)^2=\frac{e^2r^2}{1+e^2},$$

$$b-n=\pm\frac{er}{\sqrt{(1+e^2)}},$$

$$b=n\pm\frac{er}{\sqrt{(1+e^2)}};$$

per trovare a, si ha

$b-a+me-e^2a-b+n=0$, da cui

$-(1+e^2)\,a+me+n=0$;

$$a=\frac{em+n}{1+e^2};$$

le due ascisse dunque, cui corrisponde la minima delle minime distanze, sono

$$a=\frac{me+n}{1+e^2},$$

$$b=n\pm\frac{er}{\sqrt{(1+e^2)}}.$$

Da queste si ricava

$$\alpha=\frac{me^2+ne}{1+e^2},\quad \beta=m\mp\frac{r}{\sqrt{(1+e^2)}}.$$

Facciamo $FI=a$, $IK=\alpha$, $FQ=b$, $QB=\beta$, e sarà

$$\text{tang } BKP=\frac{PB}{PK}=\frac{b-a}{\alpha-\beta}=\frac{n+\frac{er}{\sqrt{(1+e^2)}}-\frac{me+n}{1+e^2}}{\frac{me^2+ne}{1+e^2}-m+\frac{r}{\sqrt{(1+e^2)}}}$$

$$=e=\text{tang } KFE;$$

dunque BK è perpendicolare alla FG.

Questa linea BK passa pel centro O; di fatto,

$$tang\ OBR = \frac{n-b}{\beta - m} = \frac{\frac{\mp er}{\sqrt{(1+e^2)}}}{\mp\frac{r}{\sqrt{(1+e^2)}}} = e = tang\ GFE$$
$$= tang\ BKP;$$

dunque $OBR + RBP + PBK = 180°$; dunque BO, BK sono per diritto.

Nelle superiori espressioni vi era il doppio segno; prendendo il superiore, come abbiamo fatto, si ha la *minima* distanza BK tra tutte le perpendicolari che vanno da un punto della circonferenza alla retta; e prendendo l' inferiore, s' avrebbe la *massima* $B'K$.

§ 393. Generalmente, quando il problema dimanda che la curva del *massimo* o del *minimo* si termini a due altre curve date, noi prenderemo per fissi due punti, ciascuno in una di quelle curve, e risolveremo il problema come se la curva cercata passar dovesse nel suo principio e nel suo fine per tali due punti fissi.

Supponiamo che a e b siano le ascisse per quei due punti, le ordinate saranno $F(a)$, $\phi(b)$, se le due curve sono espresse da quest' equazioni $s = F(t)$, $z = \phi(u)$.

Trovata dunque la relazione che dà il *massimo* o *minimo* pel caso dei due punti fissi, sostituita questa relazione nella formola $\int \Psi dx$ del *massimo* o del *minimo*, se ne faccia l' effettiva integrazione; quindi preso l' integrale tra quei limiti dati, avremo una funzione determinata dell' a e del b. Allora cercheremo quali debbono essere i valori dell' a e del b, acciocchè tra tutte le curve rappresentate dalla stessa relazione del *massimo* o *minimo* e che finiscono in due qualunque altri punti delle curve estreme, si trovi quella per la quale la determinata funzione dell' a e del b sia *massima* o *minima*. Questa seconda

27

ricerca è un problema dei *massimi* e dei *minimi* ordinarj, appartenenti alle dottrine dei §§ 57 e seguenti (*a*).

Gli esempj renderanno più chiare queste teoriche.

§ 394. Date due curve (*Fig.* 25) *EE*, *FF*, descritte in uno stesso piano verticale, si dimanda la curva *MN* ed i punti *M*, *N* nei quali essa deve segare le curve date, acciocchè un corpo grave giunga da *M* a *N* nel minor tempo possibile: questo è il celebre problema della *brachistocrona* o linea della *più veloce discesa*.

Giusta quanto abbiamo detto qui sopra, divideremo il problema in due.

I. Supponendo dati i punti *M*, *N* per mezzo delle coordinate *AB*, *BM*, *AC*, *CN* col metodo del § 391, cercheremo la relazione tra x ed y che ci dia la curva *MN* della più veloce discesa, come se il corpo dovesse andare dal punto *M* a *N*.

II. Trovata questa curva *MN*, determineremo il tempo che s' impiega da *M* a *N*, e questo tempo sarà una funzione delle *AB*, *BM*, *AC*, *CN*, ovvero semplicemente delle *AB*, *AC*; cercheremo di poi, col metodo ordinario dei massimi e dei minimi (§ 60), quali debbano essere le ascisse *AB*, *AC*, affinchè quell' espressione del tempo divenga la minima, ed avremo in questa maniera i cercati punti *M*, *N*.

(*a*) Nel calcolo delle variazioni si trattavano sì fatti problemi senza questa distinzione in due parti; ma oltre al non guadagnar nulla in sostanza rispetto alla brevità delle lor soluzioni, divenivano esse assai più complicate. Quest' idea di separare in due il quesito, la quale lo stesso Eulero giudicherebbe degna d'appartenere alla sua opera immortale, *Methodus inveniendi lineas curvas etc.*, mi fu somministrata dal Consultore di Stato Paradisi, ora Presidente del Senato italiano, letterato insigne e profondissimo geometra.

I. Sia $AB = a$, $AC = b$, $BM = \alpha$, $CN = \beta$, $AP = y$, $PL = x$: sia m l'altezza dovuta alla velocità con la quale il corpo debbe incominciare a muoversi in un punto della curva EE per giungere alla curva FF. Quando il corpo sarà arrivato a L, l'altezza cui si debbe la velocità, sarà dunque $m + HL$, ovvero $m + x - \alpha$: è inutile avvertire che noi consideriamo orizzontale. l'asse delle y, e verticale quello delle x.

Nei corpi che cadono mercè la forza di gravità, essendo la velocità proporzionale alla radice dell'altezza, potremo esprimere con $\sqrt{(m + x - \alpha)}$ la velocità del corpo nel punto L, ed essendo questa

(§ 126) $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, ovvero $\left(\frac{ds}{dx}\right) : \left(\frac{dt}{dx}\right)$ quando s e t

si risguardano come funzioni della x, s'avrà

$\sqrt{(m + x - \alpha)} = \left(\frac{ds}{dx}\right) : \left(\frac{dt}{dx}\right)$, e perciò

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{(m + x - \alpha)}} \cdot \left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{(m + x - \alpha)}} \cdot \sqrt{(1 + p^2)},$$

e quindi $t = \int \frac{\sqrt{(1 + p^2)}}{\sqrt{(m + x - \alpha)}} dx$.

La quantità pertanto che debbe divenir *minima*

è l'integrale $\int \frac{\sqrt{(1 + p^2)}}{\sqrt{(m + x - \alpha)}} dx$, preso tra i limiti $x = \alpha$, $x = \beta$.

Paragoniamo quest'integrale con la formola $\int \Psi dx$, avremo

$$\Psi = \sqrt{\frac{1 + p^2}{m + x - \alpha}},\ N = \left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = 0,\ P = \left(\frac{d\Psi}{dp}\right) =$$

$$\frac{p}{\sqrt{(m + x - \alpha)} \cdot \sqrt{(1 + p^2)}},$$ e l'equazione $N - \frac{dP}{dx} =$

diverrà $dP = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{(m+x-a)}\cdot\sqrt{(1+p^2)}} = cost.$

Diamo alla costante arbitraria la forma $\frac{1}{\sqrt{c}}$, essendo c un' arbitraria, ed avremo l' equazione $\frac{p}{\sqrt{(m+x-a)}\cdot\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$, e tale è l' equazione differenziale del primo ordine della *brachistocrona.*

Riducendo una tale equazione, si ha $cp^2 = (m+x-a)(1+p^2)$, dalla quale si ricava $p = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{\frac{m+x-a}{c-m-x+a}}$, che integrata diviene $y = \int dx \sqrt{\frac{m+x-a}{c-m-x+a}} + C$, essendo C un' altra costante arbitraria. Le due costanti C, c debbono determinarsi in modo che la curva passi pei punti M, N.

§ 395. L' equazione $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{\frac{m+x-a}{c-m-x+a}}$ diviene $\left(\frac{dy}{du}\right) = -\sqrt{\frac{c-u}{u}}$, facendo $c-m-x+a = u$: ora al § 100 abbiamo trovato che $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\sqrt{(2a-x)}}{\sqrt{x}}$ è il differenziale dell' equazione della cicloide (*Fig.* 8) $y = \sqrt{(2ax-x^2)} + Arc\ sen\ v.\ x$, essendo $= 2a$ il diametro del circolo generatore, e rotando questo nel descriverla sopra l' asse delle y; dunque la cercata curva del *minimo* avrà per equazione $y = C - \sqrt{(cu-uu)} - Arc\ sen\ v.\ u$, essendo C un' altra costante arbitraria portata dall' integrazione:

essa sarà una cicloide ordinaria generata da un circolo, il cui diametro è c, e che ruota sopra l' asse orizzontale delle y. La posizione particolare di essa dipenderà dalla circostanza di dover passare questa cicloide pei punti M, N. Poniamo nell' ottenuto integrale il valore della u, ed avremo

$$y=-\sqrt{\{c(c-m-x+a)-(c-m-x+a)^2\}}-$$
$$\text{Arc sen } v.(c-m-x+a)+C, \text{ ovvero}$$
$$y=-\sqrt{\{c(m+x-a)-(m+x-a)^2\}}-$$
$$\text{Arc sen } v.\ (c-m-x+a)+C,$$ essendo C un' altra costante arbitraria, e supponendo $\frac{c}{2}$ il raggio del circolo cui appartiene quel seno verso.

Per determinare queste costanti, osservo che facendo $y=a$, debb' essere $x=a$, e facendo $y=b$, debbe aversi $x=\beta$; avremo pertanto tra C e c queste due equazioni

$$a=-\sqrt{(mc-m^2)}-\text{Arc. sen } v.\ (c-m)+C,$$
$$b=-\sqrt{\{c(m+\beta-a)-(m+\beta-a)^2\}}$$
$$-\text{Arc sen } v.\ (c-m-\beta+a)+C,$$

dalle quali si ricava l' equazione

$$-a+b=\sqrt{(mc-m^2)}-\sqrt{\{c(m+\beta-a)-(m+\beta-a)^2\}}+\text{Arc sen } v.\ (c-m)-\text{Arc sen } v.(c-m-\beta+a),$$

la quale servirà a determinare la costante c.

In quest' equazione i due archi che s' incontrano, appartengono ad un circolo il cui raggio è $\frac{c}{2}$; per ridurli al circolo che ha per raggio quello delle tavole, cioè l' unità, scriveremo $\frac{c}{2}$ Arc sen $v.\left(\frac{2c-2m}{c}\right)$, e $\frac{c}{2}$ Arc sen. $v.\left(\frac{2c-2m-2\beta+2a}{c}\right)$ in vece di essi.

L' equazione poi $B - A = 0$ del § 390 sarà soddisfatta da sè medesima, poichè considerando come fissi i punti M, N, ove comincia e termina la *brachistocrona*, sarà il valore di ω in quei due medesimi punti nullo da sè stesso.

§ 396. II. Cerchiamo ora l' espressione del tempo *minimo* t impiegato nella discesa da M a N lungo la cicloide che passerà per quei due punti.

Abbiamo sopra trovato $t = \int \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(m+x-a)}} dx$:

poniamo in questa formola il valore di $\sqrt{(1+p^2)}$, ch' è

$\frac{p\sqrt{c}}{\sqrt{(m+x-a)}}$, ovvero $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(c-m-x+a)}}$, avendovi fatto

$p = \frac{\sqrt{(m+x-a)}}{\sqrt{(c-m-x+a)}}$, ed avremo

$t = \int \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\{c(m+x-a)-(m+x-a)^2\}}} dx$, che si riduce a

$t = \int \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(cz-z^2)}} dz$ facendo $z = m + x - a$. Questo integrale dee prendersi da $x = \alpha$ sino a $x = \beta$, ovvero da $z = m$ sino a $z = m + \beta - a$.

L' integrale di una tal formola è

$t = \sqrt{(c)} \cdot Arc\ sen\ v. \frac{2z}{c} + E$ costante arbitraria, il quale, preso tra i dati limiti, ci dà

$t = \sqrt{(c)} \cdot \left\{ Arc\ sen\ v.\ 2\left(\frac{m+\beta-a}{c}\right) - Arc\ sen\ v. \frac{2m}{c} \right\}$;

è questo il *minimo* tempo che può impiegare un corpo per discendere dal punto M al punto N, o per parlare più esattamente, a questa quantità è proporzionale quel tempo *minimo*: essa rappresenterebbe

veramente quel tempo, se si moltiplicasse pel fattore costante $\frac{1}{\sqrt{2g}}$, chiamando g la forza di gravità, o la velocità acquistata da un corpo liberamente cadente in un secondo di tempo. Sarebbe allora t espresso per mezzo di secondi.

§ 397. Per due altri punti qualunque M', N' presi nelle due curve EE, FF, troveremo un'altra cicloide che passerà per essi, ed un' espressione simile a quella sopra ottenuta, la quale ci darà quel *minimo* tempo che s' impiega ad andare da M' a N'.

Ora tra questi *minimi* tempi nei quali un corpo pesante va da una curva all' altra, cerchiamo ancora il più *minimo*; a tal fine noi differenziamo la espressione del t considerando come variabili le ascisse $AB = a$, $AC = b$, le quali sono indipendenti tra loro.

Risguardiamo poi m, α come funzioni date della a, e β come funzione del b; avremo allora per determinare a, b, e per conseguenza i punti M, N, queste due espressioni $\left(\frac{dt}{da}\right) = 0$, $\left(\frac{dt}{db}\right) = 0$.

La differenziazione del valore del t ci somministra, facendo

$$\mu = \frac{2(m + \beta - \alpha)}{c},\ \nu = \frac{2m}{c},$$

$$\left(\frac{dt}{da}\right) = \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\frac{dc}{da}\right)\left\{ \text{Arc sen } v.\frac{2(m+\beta-\alpha)}{c} \right.$$

$$- \text{Arc sen } v.\frac{2m}{c}\Big\} + \sqrt{(c)}.\Big\{\frac{1}{\sqrt{(2\mu-\mu^2)}}.\left(\frac{d\mu}{da}\right)$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(2\nu - \nu^2)}}\left(\frac{d\nu}{da}\right)\right\} = 0,$$

$$\left(\frac{dt}{db}\right) = \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\frac{dc}{db}\right)\left\{ \text{Arc sen } v.\frac{2(m+\beta-\alpha)}{c}\right.$$

$$\left. - \text{Arc sen } v.\frac{2m}{c}\right\} + \sqrt{(c)}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\mu-\mu^2)}}\cdot\left(\frac{d\mu}{db}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(2\nu-\nu^2)}}\left(\frac{d\nu}{db}\right)\right\} = 0,$$

i differenziali del c essendo dati dall' equazione trovata per determinarlo.

A semplificare il problema, facciamo alcune ipotesi sopra il valore della m, e supponiamola nulla, vale a dire, supponiamo che il corpo, allorchè si pone nel punto M, non abbia alcuna velocità, e cominci ad acquistarla nel momento in cui principia a discendere.

L'equazione che determina c, sarà in questo caso

$$-a+b = -\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} + \frac{c}{2}\text{Arc sen } v.\, 2$$

$$-\frac{c}{2}\text{Arc sen } v.\frac{2(c-\beta+\alpha)}{c}, \text{ ovvero}$$

$$b-a = -\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} - \frac{c}{2}\text{Arc sen } v \times$$

$$\frac{2(c-\beta+\alpha)}{c} + \frac{c}{2}\cdot 180^\circ,$$

da cui si ricava, prendendone i differenziali primi rispetto alla a ed alla b, e riducendo,

$$2\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} = \left(\frac{dc}{da}\right)\left[2(\beta-\alpha)+\right.$$

$$\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}}\times\left(-180^\circ + \text{Arc sen } v \times\right.$$

$$\left.\left.\frac{2(c-\beta+\alpha)}{c}\right)\right] + 2(\beta-\alpha)\left(\frac{d\alpha}{da}\right),$$

$$-2\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}}=\left(\frac{dc}{db}\right)\Big[2(\beta-\alpha)+$$

$$\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}}\times\Big(-180^\circ+Arc\ sen\ v\times$$

$$\frac{2(c-\beta+\alpha)}{c}\Big)\Big]-2(\beta-\alpha)\left(\frac{d\beta}{db}\right),$$

che noi scriveremo più semplicemente

$$(a)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}-N\left(\frac{d\alpha}{da}\right)-M=\left(\frac{dc}{da}\right)\\ N\left(\frac{d\beta}{db}\right)+M=\left(\frac{dc}{db}\right).\end{cases}$$

L' equazioni $\left(\frac{dt}{da}\right)=0$, $\left(\frac{dt}{db}\right)=0$ divengono in quest' ipotesi

$$\left(\frac{dc}{da}\right)[\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}}\ Arc\ sen\ v.\frac{2(\beta-\alpha)}{c}$$

$$-2(\beta-\alpha)]-2c\left(\frac{d\alpha}{da}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dc}{db}\right)[\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}}\ Arc\ sen\ v.\frac{2(\beta-\alpha)}{c}$$

$$-2(\beta-\alpha)]+2c\left(\frac{d\beta}{db}\right)=0,$$ che scriveremo così

$$(b)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}\left(\frac{dc}{da}\right)=\ K\left(\frac{d\alpha}{da}\right)\\ \left(\frac{dc}{db}\right)=-K\left(\frac{d\beta}{db}\right).\end{cases}$$

Sostituiamo nell' equazioni (a) i valori di $\left(\frac{dc}{da}\right)$, $\left(\frac{dc}{db}\right)$, ed avremo

$-\left\{N\left(\frac{d\alpha}{da}\right)+M\right\}=K\left(\frac{d\alpha}{da}\right)$,

$N\left(\frac{d\beta}{db}\right)+M=-K\left(\frac{d\beta}{db}\right)$: queste due equazioni ci daranno i valori dell' a e del b, che si convengono al *minimo*, dopo che avremo però eliminato da esse il valore del c, pel quale abbiamo sopra trovato l'equazione.

Le due ultime equazioni per altro ci danno $\left(\frac{d\alpha}{da}\right)=\frac{-M}{N+K}$, $\left(\frac{d\beta}{db}\right)=\frac{-M}{N+K}$, e ci dicono in conseguenza che i due punti M, N sono quelli nei quali condotte le tangenti alle respettive curve, sono queste parallele tra loro.

Se per un' altra ipotesi si facesse $m=\alpha$, cioè se la velocità con la quale il corpo grave incomincia a muoversi, si dovesse all' altezza α, allora si troverebbe che i due punti M, N sono quelli nei quali la *brachistocrona* sega ad angolo retto le curve date.

CAPO XXII.

Continuazione della dottrina dei massimi e minimi del capo precedente.

§ 398. Trovata l'equazione della curva del *massimo* o del *minimo*, conviene cercare i criterj onde distinguere il *massimo* dal *minimo*: è per questo necessario premettere un lemma.

Indicando con $f(x)$ una qualunque funzione della x, e con $f'(x)$ il suo differenziale $\left(\frac{df}{dx}\right)$, di modo che sia $f(x)=\int f'(x)\,dx$, se la quantità $f'(x)$

è sempre positiva per tutt' i valori della x da $x=a$ sino a $x=b$, essendo $a < b$, la differenza degli integrali che corrispondono a questi due valori della x, cioè $f(b)-f(a)$, sarà necessariamente una quantità positiva.

Sviluppando in serie secondo le potenze dell' ω la funzione $f(x+\omega)$, si sa essere

$$\left\{\text{posto } f'(x)=\left(\frac{df}{dx}\right),\ f''(x)=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) \text{ ecc.}\right\}$$

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+\text{ec.}$$ Dunque

$$f(x+\omega)-f(x)=\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+\text{ecc.};$$ ora

noi abbiamo veduto che possiamo sempre impiccolire ω finchè renda il primo termine $\omega f'(x)$ maggiore della somma di tutti quei che lo seguono; dunque se $f'(x)$ è una quantità positiva, si potrà prendere ω positivo, e tale che tutta la serie $\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+$ ecc. abbia necessariamente un valor positivo; dunque se $f'(x)$ è una quantità positiva, si potrà prendere ω positivo e così piccolo da rendere necessariamente la differenza $f(x+\omega)-f(x)$ positiva.

Poniamo successivamente in luogo della x, le quantità a, $a+\omega$, $a+2\omega$, $a+3\omega$ ecc., $a+n\omega$, e ne seguirà che noi potremo, coll' impiccolire continuamente ω, trovare in fine quel valore che rende le quantità

$f(x+\omega)-f(x)$
$f(x+2\omega)-f(x+\omega)$
$f(x+3\omega)-f(x+2\omega)$
$f(x+4\omega)-f(x+3\omega)$
. . . .
$f\{x+(n+1)\omega\}-f(x+n\omega)$

tutte necessariamente positive; dunque anche in questo caso la di loro somma $= f\{x + (n+1)\omega\} - f(x)$ sarà una quantità positiva. Facciamo

$a + (n+1)\omega = b$, s' avrà $\omega = \frac{b-a}{n+1}$, e si concluderà che la quantità $f(b) - f(a)$ sarà necessariamente positiva se tutte le quantità

$$f'(a),\ f'\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right),\ f'\left(a + \frac{2(b-a)}{n+1}\right),$$

$$f'\left(a + \frac{3(b-a)}{n+1}\right) \text{ ecc. sino a } f'\left(a + \frac{n(b-a)}{n+1}\right)$$

sono positive.

Dunque a maggior ragione la quantità $f(b) - f(a)$ sarà positiva, dando a x tutt' i valori possibili da $x = a$ sino a $x = b$, poichè tra questi valori si troveranno necessariamente i valori

$$a,\ a + \frac{b-a}{n+1},\ a + \frac{2(b-a)}{n+1},\ a + \frac{3(b-a)}{n+1} \text{ ecc.},$$

$a + \frac{n(b-a)}{n+1}$, prendendo per n quel numero che a noi piace.

§ 399. Questo teorema dipende dallo sviluppo delle funzioni in serie secondo le potenze intiere e crescenti della x, quando si danno alla x dei valori particolari: ora vi sono, come abbiam veduto (§ 47), dei casi nei quali questo sviluppo non può di natura sua succedere; dunque in essi non sarà neppur vero il teorema dimostrato; e siccome dal divenire infinite alcune delle funzioni $f'(x)$, $f''(x)$ ecc., siamo assicurati che lo sviluppo non è legittimo; così affinchè possa dirsi che $f(b) - f(a)$ è una quantità positiva, bisognerà anco esser certi che non solo $f'(x)$ è una quantità positiva per tutt' i valori possibili da $x = a$ a $x = b$, ma che ancora nessuna delle funzioni $f'(x)$, $f''(x)$ ecc. diviene infinita per causa di alcuno di quei valori della variabile x.

Necessariamente poi la funzione $f'(x)$ o alcuna delle sue successive $f''(x)$ ecc. è infinita per un qualche valore della x, quando la funzione $f(x) = \int dx f'(x)$ lo è per quello stesso valore; imperocchè lo sviluppo, cui si eguaglia $f(x)$, dovendo in questo caso divenire infinito, necessariamente lo diverranno alcuni suoi termini. Questo succede allorchè $f(x)$ contiene qualche denominatore, il quale annullandosi con un certo valore della x, rende allora $f(x)$ infinito.

Che poi la differenza $f(b) - f(a)$ possa non esser positiva quando alcuno dei valori da $x = a$ a $x = b$ rende infinita $f'(x)$, si può verificare con un semplicissimo esempio.

Sia $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, ed allora sarà

$f(x) = \frac{x}{1-x}$. La $f'(x)$ si conserva sempre positiva per tutt' i valori reali della x, ma tra questi vi è $x = 1$, che la rende infinita, e la $f(x)$ è positiva per tutt' i valori al di sotto della $x = 1$, e negativa per quelli al di sopra, di modo che se facciamo

$a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, si ha $f(b) - f(a) = -2 - 1 = -3$, quantità negativa.

§ 400. Ciò premesso, incominciamo dal caso più semplice, quello, cioè, del (§ 386) nel quale la funzione Ψ dell' integrale $\int \Psi dx$ contiene solo x ed y.

L' integrale $\int \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) dx$ debb' essere una quantità negativa nel *massimo* e positiva nel *minimo*, prendendo quest' integrale tra i limiti $x = a$, $x = b$; il *minimo* dunque vi sarà, se la quantità $\int \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) dx$ sarà positiva tra quei tali limiti. Ora il lemma precedente ci dice che questo succederà se appunto la

quantità $\omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ sarà positiva per tutt' i valori da $x = a$ a $x = b$, ovvero se sarà semplicemente una quantità positiva la funzione $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$, giacchè ω^2 è sempre positivo; dunque ciò che si cerca, sarà un *minimo*, quando $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ sarà positivo dando alla x tutt' i valori possibili da $x = a$ a $x = b$, ed un *massimo*, quando quei valori saranno tutti negativi.

E qui, giusta quanto abbiamo avvertito alla fine del paragrafo antecedente, aggiungeremo che rappresentando $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ con $F(x)$, è necessario che non solo siano tutti positivi o tutti negativi i valori di $F(x)$ da $x = a$ sino a $x = b$, ma che ancora le funzioni differenziali $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$ ecc. non siano ridotte infinite da alcuno di quei valori.

§ 401. Supponiamo adesso che nella funzione Ψ dell' integrale $\int \Psi dx$, il quale dee divenire *massimo* o *minimo*, si contenga, oltre x, y, anche $\left(\frac{dy}{dx}\right) = p$. In questo caso l' integrale

$$\int \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \left(\frac{d^2\Psi}{dy\,dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) \right\} dx,$$

preso tra i limiti $x = a$, $x = b$, debb' esser negativo nel *massimo*, positivo nel *minimo*. Rappresentiamo questa quantità così,

$$\int \left\{ \omega^2 P + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) Q + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 R \right\} dx,$$ ed osservando che la parte senza segno integrale non può avere

altro che questa forma $a\omega^2$, il di cui differenziale è $\omega^2\left(\frac{da}{dx}\right)+2a\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, avremo l'equazione

$$\int\left\{\omega^2 P+2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)Q+\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 R\right\}dx=a\omega^2+$$

$$\int\left\{\left[P-\left(\frac{da}{dx}\right)\right]\omega^2+2(Q-a)\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+R\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\}dx,$$

nella quale possiamo prendere in vece dell' a quel valore che ci piace.

Prendiamolo in modo che la quantità sotto il segno integrale abbia due fattori eguali: s' avrà allora per determinare a, quest' equazione

$$(b)\ \ldots\ldots\left\{P-\left(\frac{da}{dx}\right)\right\}R=(Q-a)^2,$$ e quindi

$$\int dx\left\{P\omega^2+2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)Q+\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 R\right\}=a\omega^2+$$

$$\int R dx\left\{\omega\frac{Q-a}{R}+\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\}^2.$$

Ora la quantità sotto il segno integrale sarà positiva o negativa per tutt' i valori della x da $x=a$ sino a $x=b$, se lo è la quantità R; dunque in virtù del lemma del paragrafo antecedente concluderemo che l' integrale $\int R dx\left\{\omega\frac{Q-a}{R}+\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\}^2$, preso tra i limiti $x=a$, $x=b$, sarà positivo, se $\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)$ lo sarà per tutt' i valori della x da $x=a$ sino a $x=b$, e negativo se $\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)$ lo sarà per quei medesimi valori della x. Dunque il criterio per distinguere il *massimo* dal *minimo* ci sarà dato dalla quantità $\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)$; se essa sarà positiva per quei valori della x, avremo il *minimo*; e se negativa, il *massimo*.

Rispetto alla quantità $a\omega^2$, se noi la indichiamo con (A) al principio dell' integrale, cioè quando $x=a$, e con (B) alla fine del medesimo, cioè quando $x=b$, bisognerà che sia $(B)-(A)$ una quantità negativa nel *massimo*, e positiva nel *minimo*, ovvero nulla nei due casi, indipendentemente dal valore dell' ω, che dee restare indeterminato; così se il valore della y fosse dato per mezzo dei valori a, b della x, il valore corrispondente dell' ω essendo allora nullo, s' avrebbe $(A)=0$, $(B)=0$, e la condizione precedente sarebbe adempita tanto pel *massimo* quanto pel *minimo*; e se i valori della y non sono dati, bisognerà soddisfare all' equazione $(B)-(A)=0$.

La costante arbitraria che l' integrazione della equazione (b) introduce nel valore dell' α, ci faciliterà l' adempimento di queste condizioni.

E qui avvertiamo che tutti questi criterj suppongono che nessuna delle quantità P, Q, R ed α divengano infinite per alcuno di quei valori della x compresi da $x=a$ sino a $x=b$; così a quei criterj conviene aggiungere questa condizione, senza la quale non potremmo esser sicuri dell' esservi il *massimo* o il *minimo*.

La quantità α è la più difficile a riconoscere se diviene infinita, poichè essa dipende dall' integrazione dell' equazione (b), che il più delle volte non può farsi; ma questa difficoltà non appartiene alle presenti teoriche.

Nel problema del § 391 la quantità che divenir dovea *massima* o *minima*, era $\int dx\sqrt{(1+pp)}$; dunque

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}},\ \text{ovvero}$$

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{(1+n^2)^3}},\ \text{poichè si è trovato } p=n,$$

essendo n costante arbitraria: ora questa quantità è sempre positiva, nè diviene infinita per alcun valore dell' ascissa x; dunque vi avrà il *mnimo*.

Nell' altro problema del § 394 la quantità che per un' adattata relazione tra x ed y divenir dovea *massima* o *minima*, era $\int \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(m+x-\alpha)}} dx$; dunque $\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{(m+x-\alpha)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$; questa quantità essendo sempre positiva per tutt' i valori da $x=\alpha$ sino a $x=\beta$, vi sarà necessariamente il *minimo*.

§ 402. Finora abbiamo veduto come trovare si poteva una curva la quale possedesse una certa proprietà del *massimo* o del *minimo* tra tutte le infinite curve che poteano descriversi in qualunque modo, corrispondenti però alla stessa ascissa: al presente noi parleremo della ricerca di una curva la quale appartenendo ad una classe d' infinite altre curve, dotate però tutte di una proprietà comune, debbe avere una certa proprietà del *massimo* o del *minimo*; come se, per esempio, tra tutte le curve della stessa lunghezza si cercasse quella che gode una certa proprietà del *massimo* o del *minimo*.

Le dottrine spiegate superiormente si applicano facilmente al caso presente: di fatto, supponiamo che tra le serie infinite di curve nelle quali le quantità espresse dagl' integrali indefiniti $\int \Psi' dx$, $\int \Psi'' dx$, ecc. hanno tutte lo stesso valore, si cerchi quella curva in cui la quantità $\int \Psi dx$ sia *massima* o *minima*. Se rappresentiamo con α, β, γ, ecc. tante costanti arbitrarie, e se troviamo con i metodi sopra spiegati quella curva (E) per la quale la quantità $\int \Psi dx + \alpha \int \Psi' dx + \beta \int \Psi'' dx +$ ecc. è *massima* o *minima*, questa curva sarà quella che si cerca; imperocchè supponendo trovata questa curva (E), e facendo allora $\int \Psi dx = A$, $\alpha \int \Psi' dx = B$, $\beta \int \Psi'' dx = C$, ecc., si avrà la quantità $A+B+C+$ ecc. che sarà maggiore o minore di tutte le simili quantità nelle infinite curve possibili che possono corrispondere alla

stessa ascissa. Tra tutte queste infinite curve possibili ve ne sarà un numero parimente infinito, per le quali le quantità B, C, ecc. conservando lo stesso valore, la quantità A sarà in esse minore di quella corrispondente nella curva (E); per esempio, tra tutte le curve possibili ve ne sarà una cui corrisponderà la quantità

$''A + B + C +$ ecc., una cui
$'A + B + C +$ ecc., una cui
$A + B + C +$ ecc., e questa è la curva (E); una cui
$A' + B + C +$ ecc., una cui
$A'' + B + C +$ ecc., una cui
ecc. ecc.

essendo ecc., $''A < 'A < A$; $A > A' > A''$ ecc.: dunque questa curva medesima (E) sarà quella per la quale $\int \Psi\, dx$ è un *massimo* o *minimo*, essendo nel tempo stesso costanti le quantità $\int \Psi' dx$, $\int \Psi'' dx$, ecc.

I coefficienti α, β, γ, ecc. si determineranno in maniera che gl' integrali $\int \Psi' dx$, $\int \Psi'' dx$, ecc. abbiano appunto quei valori costanti che assegna il problema.

I criterj poi onde distinguere il *massimo* dal *minimo* saranno gli stessi che quelli della sola formola $\int \Psi dx$, le altre essendo costanti.

§ 403. Facciamone un primo esempio.

Tra tutte le curve nelle quali la formola $\int yxdx$ ha lo stesso valore, si cerca quella in cui il valore della formola $\int yydx$ è *massimo* o *minimo*, supponendo che i termini delle medesime debbano corrispondere all' ascisse $x = a$, $x = b$, o che quelle formole integrali debbano estendersi tra i limiti $x = a$, $x = b$.

Secondo ciò che abbiamo detto qui sopra, il problema si riduce a cercare la relazione che debb' essere tra x e y, acciocchè la quantità $\int yydx + \alpha \int yxdx$, ovvero $\int \{yy + \alpha yx\} dx$ sia *massima* o *minima*, prendendo l' integrale tra i limiti $x = a$, $x = b$. Se indichiamo con Ψ la quantità $yy + \alpha yx$, questa relazione

ci è data (§ 386) dall'equazione $\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = 2y + ax = 0$:

soddisfà dunque al quesito $y = -\frac{ax}{2}$, ch'è un'equazione per la linea retta. Vi è poi il *minimo*, imperocchè $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ égguaglia una quantità positiva.

Supponiamo ora che il valore della formola $\int yxdx$, che debb' essere lo stesso in tutte le curve, sia $= m$ quando si prende l'integrale tra i limiti $x = a$, $x = b$, e potremo facilmente determinare α; di fatto, essendo $\int -\frac{\alpha x}{2} xdx = \frac{\alpha}{6}(a^3 - b^3)$, quando si estende la integrazione tra i limiti $x = a$, $x = b$, avremo $\frac{\alpha}{6}(a^3 - b^3) = m$, e quindi $\alpha = \frac{6m}{a^3 - b^3}$; la cercata relazione pertanto diverrà $y = \frac{3m}{b^3 - a^3} x$.

La linea retta rappresentata da quest' ultima equazione passa per l'origine delle ascisse, e fa con l'asse un angolo, la cui tangente è $\frac{3m}{b^3 - a^3}$.

Una tal retta possiede questa proprietà che tra tutte le linee o rette o curve, i cui termini corrispondono alle ascisse $x = a$, $x = b$, e per le quali il valore di $\int yxdx$ preso tra quei limiti è eguale a m, essa ha il più piccolo valore della formola $\int yydx$.

§ 404. Tra tutte le curve della stessa lunghezza, le quali uniscono i punti a, z, si cerca quella che racchiude la *massima* superficie $aAZz$.

La proprietà comune a tutte le curve tra le quali si cerca quella del *massimo*, è l'essere costante il

valore della loro lunghezza $\int dx \sqrt{(1+pp)}$; e la quantità che dee diventar *massima* è $\int y dx$; dunque cercheremo la relazione tra x e y, perchè
$\int y dx + a \int dx \sqrt{(1+pp)}$, ovvero $\int dx \{y + a\sqrt{(1+pp)}\}$
sia *massimo* o *minimo*, essendo a una costante indeterminata.

Secondo la regola insegnata al § 388 per trovare il *massimo* o *minimo* della formola $\int \Psi dx$, si ha la cercata relazione data da quest' equazione

$\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) = 0$, che nel nostro caso diviene

$1 - \frac{a}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = 0$, ovvero

$ad\left(\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = dx$, il cui integrale è

$\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} = x + C$, essendo C una costante arbitraria. Da quest' ultima equazione si ricava

$p = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x+C}{\sqrt{\{a^2 - (x+C)^2\}}}$, che egualmente s'integra, e si ha $y = C' \pm \sqrt{\{a^2 - (x+C)^2\}}$, ovvero $a^2 = (y - C')^2 + (x+C)^2$, ch' è l' equazione generale del circolo: concluderemo dunque che un qualunque arco di circolo condotto pei punti a, z è la curva che fra tutte le curve della medesima lunghezza rinchiude la *massima* o la *minima* superficie; è la *massima* se l'arco volta la concavità all'asse, e la *minima* se volta la convessità. Le tre costanti a, C, C' saranno determinate dalla posizione dei punti fissi a, z, e dalla data lunghezza dell' arco.

E qui osserviamo che l' arco circolare az condotto pei termini a, z non solo racchiude il *massimo* spazio $aAZz$, ma ancora una qualunque altra

linea $aCEDz$ condotta da un termine a all' altro z, racchiude insieme con l' arco la *massima* superficie; di fatto se l' area $aAZz$ è *massima*, sarà ancora $aAZz - aAC - zZD + CED$ una quantità *massima* per essere di una grandezza costante le quantità aAC, zZD, CED, qualunque linea prendasi per az.

§ 405. La data funzione Ψ, di cui l' integrale esser debbe *massimo* o *minimo*, appartiene ad un punto della curva corrispondente all' ascissa x. Facendo variare la relazione tra x ed y, quella funzione appartiene anche al punto corrispondente alla medesima ascissa x, ma questo trovasi allora nella nuova curva dataci dalla relazione variata.

Ora il secondo di questi due punti non è già nel luogo ove è andato il primo punto nel passaggio totale che ha fatto la curva da una situazione all' altra; dunque, rigorosamente parlando, quella funzione Ψ considerata nei due diversi stati non appartiene al medesimo medesimissimo punto preso in quelle diverse situazioni.

Supponiamo che si voglia considerare sotto questo aspetto il cangiamento della funzione Ψ, supponiamo, cioè, che essa debba sempre appartenere al medesimo medesimissimo punto; è chiaro allora che non solo dovrà variare la relazione tra y e x, ma ancora la stessa x.

Sia dunque $\int \Psi dx$ la funzione che divenir debbe *massima* o *minima*, essendo $\Psi = \Psi\ (x, y, p)$.

Poniamo $x + iK$ in vece della x: la y mercè la sola variazione della relazione diveniva $y + i\omega$, e quindi p diveniva $p + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$. Se ora vi poniamo $x + iK$ in vece della x, la y diverrà

$$y + iKp + \frac{i^2K^2}{2}q + \text{ecc.} + i\omega + i^2K\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \text{ecc.},$$

ovvero

$$y + i\{Kp + \omega\} + \frac{i^2}{2}\left\{K^2q + 2K\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} + \text{ecc.};$$

la p diverrà

$$p + iKq + \frac{i^2K^2}{2} r + \text{ecc.} + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + i^2K\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + \text{ecc.},$$

ovvero

$$p + i\left\{Kq + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} + \frac{i^2}{2}\left\{K^2r + 2K\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\right\} + \text{ecc.};$$

si avrà dunque

$$\int \Psi \left[x + iK,\ y + i(Kp + \omega) + \frac{i^2}{2}\left\{K^2 + 2K\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} + \text{ecc.},\ p + i\left\{Kq + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} + \frac{i^2}{2}\left\{K^2 r + 2K\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\right\} + \text{ecc.} \right] dx.$$

Sviluppiamo la quantità che è sotto il segno integrale, ed avremo allora

$$\int \Psi(x, y, p)\, dx + i\int\left\{K\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) + (Kp + \omega)\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left[Kq + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right]\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)\right\} dx + \frac{i^2}{2}\int\left\{K^2\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2}\right) + 2K(Kp + \omega)\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right) + 2K\left[Kq + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right]\left(\frac{d^2\Psi}{dpdx}\right) + (Kp + \omega)^2\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + 2(Kp + \omega)\left[Kq + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right] \times \left(\frac{d^2\Psi}{dydp}\right) + \left[Kq + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right]^2\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)\right\} dx + \text{ecc},$$

che scriveremo così

$$\int \Psi(x, y, p)\, dx + iE + \frac{i^2}{2} F + \text{ecc.}$$

Se ora in vece di sostituire nella data formola integrale quei valori delle variabili x, y e p, vi avessimo posto $x - iK$, $p - i\omega$, in vece della x, p, avremmo avuto lo stesso sviluppo, con questa sola differenza che le quantità moltiplicate per le potenze dispari della i sarebbero state negative.

Acciocchè dunque abbiasi il *massimo* o il *minimo*, converrà che la quantità

$$(E) \ldots \int \left\{ K\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) + (Kp + \omega)\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left[Kq + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right]\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)\right\} dx$$ tra i proposti limiti sia nulla senza che vi abbiano che fare i valori di K ed ω; l' integrale poi, il quale moltiplica $\frac{i^2}{2}$ che abbiamo rappresentato per F, dovrà essere una quantità negativa nel *massimo*, e positiva nel *minimo*.

L' integrale (E), se poniamo $d\Psi = Mdx + Ndy + Pdp$, può mettersi sotto questo aspetto

$$P\omega + \int \omega \left\{ N - \frac{dP}{dx} \right\} dx + \int K\{M + Np + Pp\} dx,$$

ovvero

$P\omega + \int \omega \left\{ N - \frac{dP}{dx} \right\} dx + \int Kd\Psi$; ora dovendo questa quantità esser nulla, si avrà

$$P\omega + \int \omega \left\{ N - \frac{dP}{dx} \right\} dx + \int Kd\Psi = 0.$$

Di qui si ricaverà $N - \frac{dP}{dx} = 0$, e questa sarà l' equazione la quale ci darà la relazione tra le coordinate della curva che si cerca.

La quantità poi $P\varpi + \int Kd\Psi$, allorchè vi avremo posto in vece della y il suo valore trovato fatto della x, estesa tra i limiti $x = a$, $x = b$, dovrà annullarsi.

E di qui si vede che, supponendo anche che varj l'ascissa x, l'equazione che dà il *massimo* ed il *minimo* è la medesima, l'unico cangiamento accade nei limiti dell'integrale; quando la x non variava, la quantità che tra quei limiti si doveva annullare, era $P\varpi$, e se la x varia, la quantità che tra quegli stessi limiti debbe andare a zero, è $P\varpi + \int Kd\Psi$; così indicando per $\{P\varpi + \int Kd\Psi\}^0$ il valore di $P\varpi + \int Kd\Psi$ quando $x = a$; e per $\{P\varpi + \int Kd\Psi\}^1$ lo stesso valore quando $x = b$, si avrà $\{P\varpi + \int Kd\Psi\}^1 - \{P\varpi + \int Kd\Psi\}^0 = 0$.

Relativamente poi ai criterj onde distinguere il *massimo* dal *minimo*, i quali sono dati dalla quantità F, si troverebbe che questi sono i medesimi che quelli ottenuti pel caso nel quale x non varia: l'unica differenza consiste nelle quantità che debbono annullarsi ai limiti dell'integrale.

Chi bramasse più estese dottrine in questo genere d'indagini, non ha che a leggere il mio Corso del calcolo sublime.

APPENDICE

SOPRA IL CALCOLO DEGL' INFINITESIMI.

I. Spiegato il calcolo differenziale ed integrale, non che le sue applicazioni con tutto il rigore geometrico, mercè la dottrina delle funzioni derivate, io voglio esporre la teorica degl' infinitesimi, sulla quale altra volta erano fondati quei calcoli. Vedremo allora come anco per questa seconda via si giunge ai medesimi risultamenti che per la prima; una siffatta conformità ci dimostrerà l'esattezza dei risultamenti del calcolo degl' infinitesimi, e quindi potremo adoperare gl' infinitamente piccoli come un istrumento sicuro e comodo per abbreviare e semplificare talvolta le dimostrazioni, come io ho anco dichiarato nell' Appendice al mio *Corso del calcolo sublime*, stampato nel 1808.

Ecco il primo principio dal quale deriva il calcolo infinitesimale.

Si dimanda che possano prendersi indifferentemente l' una per l' altra due quantità, le quali tra loro differiscano solo di una quantità infinitamente piccola.

Da questo poi ne dipende un altro, cioè *Che se due quantità sono tali che una sia infinite volte minore di un' altra, si abbia essa a considerare assolutamente come nulla rispetto a questa*; così se la minore di quelle quantità è finita, l' altra (rispetto a cui la prima debbe aversi per nulla) dovrà essere infinite volte maggiore di quella, e ad essa si dà il nome d' *infinito*; se poi è finita la maggiore di quelle due quantità, la quantità che rispetto a questa debbe annullarsi, ne sarà infinite volte minore, e

si chiama *infinitesima*. Indicando quindi con m una quantità finita, con ∞ una quantità infinita, con $\frac{1}{\infty}$ una infinitesima, si ha, giusta il mentovato principio, $m + \infty = \infty$; $m + \frac{1}{\infty} = m$.

Questi infiniti ed infinitesimi diconsi *del primo ordine*. Dicesi infinita di secondo ordine una quantità infinite volte maggiore di un' infinità di primo, ed infinitesima di *secondo ordine* quell' altra che è infinite volte minore di un infinitesimo di primo; e così via discorrendo; in conseguenza poi del suddetto principio si è convenuto che un infinito di un ordine inferiore debba risguardarsi come zero rispetto ad uno d'ordine superiore; ed un infinitesimo di ordine superiore debba risguardarsi come zero dirimpetto ad un infinitesimo d' ordine inferiore.

II. Ciò posto, indichiamo con $\phi(x)$ una funzione della x, e supponendo che x aumenti di una quantità infinitesima, che indicheremo con dx, si avrà $\phi(x + dx)$. Sviluppata questa secondo le potenze del dx, sarà $\phi(x) + Pdx + Qdx^2 +$ ecc. L' aumento dunque che riceve in quel caso la funzione $\phi(x)$ è composto del termine Pdx infinitesimo del primo ordine, del termine Qdx^2 infinitesimo del secondo ordine, ecc. Ma in virtù dei sopra spiegati principj, Qdx^2 è zero dirimpetto a Pdx; dunque tutto l' aumento che riceve la $\phi(x)$ si può dire che sta nel solo termine Pdx. Questo aumento chiamasi il differenziale della $\phi(x)$, e s'indica con un d posto avanti ad essa, onde si ha $d\phi(x) = Pdx$.

III. Se con $\phi(x, y)$ indichiamo una funzione delle due x, y e supponiamo ch' esse aumentino delle quantità infinitesime dx, dy si avrà la funzione $\phi(x + dx, y + dy)$ la quale sviluppata secondo le potenze ed i prodotti di dx, dy, diverrà $\phi(x, y) + Pdx + Qdy + P'dx^2 + Rdxdy + Q'dy^2 +$ ec. L' aumento adunque che ha ricevuto $\phi(x, y)$ è

composto d' infinitesimi del primo ordine, d' infinitesimi del secondo, ecc.; e risguardando come nulli tutti questi infinitesimi, eccettuati quei del primo ordine, un tale aumento si ridurrà a $Pdx + Qdy$; e questo indicato con $d\phi(x, y)$, si avrà

$$d\phi(x, y) = Pdx + Qdy.$$

$Pdx + Qdy$ chiamasi il differenziale totale di $\phi(x, y)$ ed i due termini Pdx, Qdy hanno il nome dei differenziali parziali, il primo *a riguardo* della x, ed il secondo *a riguardo* della y.

I differenziali adunque del primo ordine sono quantità infinitamente piccole del primo ordine. I differenziali poi del secondo ordine si ricavano da quei del primo, come questi si ricavarono dalla funzione, senza però che si abbia alcun riguardo al dx ed al dy che trovansi nei differenziali primi. Si dica una cosa simile pei differenziali degli ordini superiori; questi differenziali secondi sono infinitesimi di secondo ordine, ecc.

IV. Sia $\phi(x, y) = 0$ un' equazione tra x ed y: sia dx l' aumento infinitesimo della x, e dy quello infinitesimo che riceve la y, mercè dell' aumento della x; la funzione $\phi(x, y)$ diventerà allora $\phi(x, y) + Pdx + Qdy + P'dx^2 +$ ecc.; ma in virtù dei sopra stabiliti principj le due quantità $\phi(x, y)$, $\phi(x, y) + Pdx + Qdy +$ ecc. debbono prendersi per eguali, dunque si avrà l' equazione

$\phi(x, y) + Pdx + Qdy + P'dx^2 +$ ecc. $= 0$; ma $\phi(x, y) = 0$, dunque $Pdx + Qdy + P'dx^2 +$ ecc. $= 0$.

Ora tosto che gl' infinitesimi degli ordini superiori svaniscono in confronto degl' inferiori quell' equazione si riduce a $Pdx + Qdy = 0$; dunque dall' equazione $\phi(x, y) = 0$ può ricavarsi l' equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$, la quale consiste nell' eguagliare a zero il differenziale totale del primo membro.

L'equazione $Pdx + Qdy = 0$ se si divide per dx, diviene $P + Q\frac{dy}{dx} = 0$, ed allora il primo membro non ha più aspetto di quantità infinitesima, perchè il quoziente di due infinitesimi del primo ordine dy, dx è una quantità finita.

Data l'equazione $\phi(x, y) = 0$, il differenziale primo della y è $dx = -\frac{Q}{P}dx$; se noi volessimo il differenziale secondo della medesima y, che s' indica con d^2y, questo si avrebbe prendendo il differenziale del secondo membro $-\frac{Q}{P}dx$, senza alcun rispetto alla x, e si avrebbe in questa guisa un' equazione differenziale del secondo ordine, e così via via. Lo stesso si dica delle funzioni ed equazioni tra più variabili.

Queste espressioni algebratiche che noi abbiamo ricavate dalla considerazione degl' infinitesimi per rappresentare i semplici differenziali, i differenziali totali, i parziali e l' equazioni differenziali, ognuno vedrà che sono le stesse che abbiamo stabilite con tutto il rigore geometrico nei capi I e II, per rappresentare le medesime cose; così non può cader dubbio sopra ciò che da queste formole dedurremo.

V. Ma dimostriamo generalmente che l' equazioni differenziali ottenute colla dottrina degl' infinitesimi sono esatte e dotate di tutto il rigore geometrico, per quanto i principj di questa dottrina non siano a rigore veri.

Abbiansi le due funzioni Ψ, ϕ composte della variabile x, e data essendo la funzione Ψ, cerchisi la ϕ. Supponiamo che x divenga $x + \omega$, e i due aumenti che riceveranno quelle funzioni indicati con $\Delta\Psi$, $\Delta\phi$, saranno

$$\Delta\Psi = P\omega + Q\omega^2 + \text{ecc.}, \quad \Delta\phi = P'\omega + Q'\omega^2 + \text{ecc.}$$

Figuriamoci che le condizioni del problema stabiliscano una certa relazione tra $\Delta\phi$, $\Delta\Psi$ rappresentata dall' equazione $F(\Delta\phi, \Delta\Psi) = o$, il primo membro della quale sia una funzione intiera di $\Delta\phi$, $\Delta\Psi$. È manifesto che sostituendo in quest' equazione i valori di $\Delta\phi$ e $\Delta\Psi$, ed ordinando il primo membro dell'equazione a seconda delle potenze di ω, avremo un' altra equazione di questa forma $R\omega + S\omega^2 + T\omega^3 +$ ecc. $= o$, la quale, giusta i principj dell' algebra cartesiana, ci darà $R = o$, $S = o$, ecc. Ora il termine $R\omega$ non può venire che dai primi termini $P\omega$, $P'\omega$ delle serie che compongono i valori degli aumenti $\Delta\phi$, $\Delta\Psi$; il termine $S\omega^2$ non può venire che dai primi e dai secondi termini di quelle serie, e così via via; dunque se considerando ω come un incremento infinitesimo, si trascurano le di lui potenze superiori rispetto alle inferiori, se facciamo, cioè, $\Delta\phi = P\omega$, $\Delta\Psi = P'\omega$, si giungerà anche con questa supposizione all' equazione stessa $R = o$, giacchè essa si ricaverà dall' altra $F(P\omega, P'\omega) = o$, trascurando nello sviluppo di essa le potenze di ω superiori alla prima.

Se la quantità R fosse di natura sua nulla, allora converrebbe tener conto delle potenze superiori dell' ω, e si avrebbe l' equazione $S\omega^2 = o$, la quale ci verrebbe dall' altra $F(P\omega + Q\omega^2, P'\omega + Q'\omega^2) = o$ trascurando nello sviluppo le potenze superiori alla seconda. L' equazione $R\omega = o$ è una equazione differenziale del primo ordine; la $S\omega^2 = o$ lo è del secondo, ecc.; ω poi fa qui le veci del dx: quando ω è una quantità infinitesima, anco $\Delta\phi$, $\Delta\Psi$ lo sono; e rappresentandoli in questo caso con $d\phi$, $d\Psi$, divengono eguali a Pdx, $P'dx$. Si vede pertanto che il supporre le porzioni $\Delta\phi$, $\Delta\Psi$ infinitesime, se in tutto rigore geometrico non è vero, conduce però ad una equazione vera $Rdx = o$; imperciocchè quei termini che in virtù di essa trascuriamo, non entrano a formare quella equazione anco che trascurati non fossero; così un tal supposto nella grandezza del dx è di sommo vantaggio diminuendo la molestia del calcolo.

Ed ecco pertanto come il calcolo differenziale, considerato rispetto a sè medesimo, conduce a risultamenti esatti, anco appoggiato sulla dottrina degl' infinitesimi; giacchè le cose che si ottengono con questa dottrina, sono quelle stesse che si ottennero con ragionamenti rigorosi.

VI. Veniamo ora alle applicazioni. Per ciò che spetta a quelle le quali si ottengono per mezzo della semplice differenziazione o integrazione dell' equazioni, vale a dire, per mezzo dell' equazioni *sussidiarie* che la differenziazione o integrazione ci somministra, nulla partecipano esse della dottrina che dà nascita al calcolo differenziale; quindi è che esse sono rigorose e legittime, sia che si adoperino gl' infinitesimi, sia che si faccia uso, per dare i fondamenti del calcolo differenziale, della dottrina delle funzioni derivate: esse tutte si appoggiano al teorema: *Se si ha una equazione tra più variabili, tutte l' equazioni differenziali che da essa possono ricavarsi, sono vere e stanno a martello insieme con lei.*

VII. Per le applicazioni della Geometria si fanno nelle quantità geometriche alcune supposizioni, mercè le quali si può allora in esse fare uso dei principj degl' infinitesimi; così una curva si risguarda come composta di un numero infinito di latercoli di lunghezza infinitesima, e per tangente in un punto della curva s' intende uno di quei latercoli prolungato sino all' incontro dell' asse. Chiamata allora x l' ascissa, y l' ordinata corrispondente al punto ove comincia il latercolo, $x+dx$, $y+dy$ le coordinate del punto ove il latercolo finisce, si ha subito la lunghezza di quel latercolo rappresentata dall' ipotenusa di un triangolo del quale i cateti sono dx, dy, cioè rappresentata da $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; e siccome questa lunghezza è l' aumento dell' arco della curva (il quale chiamo s) corrispondente all' ascissa x, quando x cresce del dx, così questo aumento è il differenziale dell' arco stesso s, e si ha

$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{ax^2}\right)}$, e quindi

$s = \int dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; questa formola trovammo anco con raziocinio rigorosamente geometrico (§ 164).

VIII. Le superficie curve poi si risguardano come formate da un numero infinito di faccette o piani infinitamente piccoli, ed un piano tangente in un punto di una superficie s' intende quello ch' è formato da una di quelle faccette estesa da ogni banda; chiamate allora x, y, z le coordinate ortogonali di un punto della superficie, supponiamo che $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ rappresentino le coordinate di un altro punto infinitamente vicino al primo, onde siano dx, dy i due aumenti infinitesimi tra loro indipendenti che ricevono le coordinate x, y, e dz l' aumento infinitesimo che l' ordinata z, funzione delle altre due, riceve in virtù di quegli altri due aumenti; una delle faccette piane, delle quali si parla, sarà quella infinitesima porzione della superficie la quale ricuopre il rettangolo infinitesimo $dxdy$; anzi questo sarà la di lei projezione sul piano delle x, y. L' estensione adunque di quella faccetta sarà eguale a $dxdy$ diviso pel coseno dell' inclinazione di essa, vale a dire, del piano tangente sul piano delle x, y; ora questo coseno essendo eguale a

$\frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}}$. sarà una tal faccetta

$dxdy \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}$; ma indicata con S la porzione della superficie spettante alle coordinate x, y, z, quell' estensione della faccetta sarà l' aumento infinitesimo che riceve la stessa S quando le coordinate x, y, z diventano $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$,

dunque il di lei differenziale parziale rispetto a x e ad y sarà

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right) dxdy = dxdy \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\}}, \text{ e quindi}$$

$$S = \iint dxdy \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\}}, \text{ come trovam-}$$

mo al § 219.

Nel modo stesso colla considerazione degl' infinitamente piccoli, risguardando le curve e le superficie come abbiamo detto qui sopra, talvolta per via più breve si ottengono risultamenti i quali esattamente confrontano con quelli ottenuti con rigore geometrico.

XI. Una equazione $\phi(x, y, a) = 0$ appartiene ad una curva. Ora se noi fingiamo che non cangiando le coordinate x, y si cangi il parametro, crescendo esso di una quantità infinitamente piccola da, l'equazione $\phi(x, y, a + da) = 0$ non apparterrà più alla medesima curva, ma ad un' altra della medesima specie che da essa differisce infinitamente poco nella grandezza del parametro. Ora queste due curve, quella, cioè, dell' equazione $\phi = 0$, e l'altra della equazione $\phi(x, y, a + da) = 0$ si segheranno, generalmente parlando, in un punto, e per questo punto dovranno nel tempo stesso esser vere le due equazioni $\phi(x, y, a) = 0$, $\phi(x, y, a + da) = 0$, dal che segue che l' equazioni di questo punto saranno il complesso di queste due equazioni $\phi = 0$, $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$. Ora se risguardando la seconda curva come la prima, si suppone che il di lei parametro varj di una quantità piccolissima, si avrà una seconda intersecazione, e così via via. Se poi si vorrà la curva prodotta da questa serie di punti d' intersecazione, cioè dalla intersecazione continua di una serie di curve tutte della medesima natura, e pochissimo differenti l' una dall' altra (la qual curva

è quella che toccherebbe o abbraccerebbe tutte queste curve medesime), sarà questa curva data dall' eliminazione del parametro tra queste due equazioni $\phi = 0$, $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$. A questo risultamento giungemmo anco al § 356.

X. Un' equazione fra tre variabili x, y, z ed un parametro costante a, $\phi(x, y, z, a) = 0$ appartiene ad una superficie. Se si suppone che il parametro riceva un aumento infinitamente piccolo da, la nuova equazione $\phi(x, y, z, a + da) = 0$ apparterrà ad un' altra superficie della medesima natura ed infinitamente vicina alla prima. Queste due curve, generalmente parlando, si segheranno in una curva a doppia curvatura, in tutt' i punti della quale le due equazioni

$$\phi(x, y, z, a) = 0, \quad \phi(x, y, z, a + da) = 0$$

dovranno essere vere nello stesso tempo; ora la seconda di queste due equazioni, per ciò appunto che essa è vera nel tempo medesimo della prima, ci dà l' equazione $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$; dunque le due equazioni di questa curva a doppia curvatura saranno $\phi = 0$, $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$. Se poi si vorrà la superficie prodotta dalla serie di queste curve a doppia curvatura, le quali sono formate dalla continua e successiva intersecazione di tutte quelle superficie della medesima famiglia, e pochissimo differenti l' una dall' altra (la quale superficie toccherebbe o abbraccerebbe tutta quella famiglia di superficie), basterà, per averne l'equazione, eliminare il parametro a dalle due equazioni $\phi = 0$, $\left(\frac{d\phi}{da}\right) = 0$, come abbiamo con rigorosi principj dimostrato.

Io ho riferite queste considerazioni sopra la variazione infinitesima dei parametri nell' equazioni delle superficie, perchè da esse il celebre signor Monge ha ricavata tutta la dottrina della generazione delle superficie; così vedendo i miei lettori che siffatte considerazioni conducono a conseguenze le quali si ottengono anco con il metodo rigoroso delle funzioni derivate, non avranno essi alcun dubbio sopra tutte quelle altre proprietà delle curve a doppia curvatura e delle superficie ritrovate dal su lodato geometra e da altri per mezzo delle dottrine medesime degl' infinitesimi.

XI. Anco nella meccanica s' introdusse la dottrina degl' infinitesimi per determinare la velocità e le forze acceleratrici nei moti variati, e si ottennero quelle formole le quali poi sonosi ricavate con rigoroso metodo dalla teorica delle funzioni derivate (Capo XIV).

Pongasi per questo, che un qualunque moto variabile in un istante o momento infinitesimo di tempo possa assumersi come equabile ed uniforme, stante che l' incremento della velocità che in tale istante il moto riceve, è infinitesimo, e quindi trascurabile a confronto della velocità intiera del corpo che si muove. Se dunque indichiamo con dt questa porzioncella infinitesima del tempo, con ds lo spazietto infinitesimo in tale istante descritto, e con v la velocità con la quale è descritto questo spazietto, sarà sempre $v = \frac{ds}{dt}$.

XII. Ma un moto variabile può anco per un istante infinitesimo risguardarsi come uniformemente accelerato. Di fatto, nel moto uniformemente accelerato, una forza accelerativa costante e finita produce in un istante infinitesimo dt un aumento infinitesimo di velocità dv; ora nel moto variato la forza acceleratrice crescendo essa medesima nell' istante dt di una quantità infinitamente piccola, si produrrà in quell' istante per causa di questa quantità infinitamente

piccola di forza un aumento di velocità d^2v, infinitesimo del secondo ordine; quindi in un istante qualunque dt del moto variato, $dv + d^2v$ è il vero aumento della velocità; e dv ne è l'aumento, se la forza acceleratrice non avesse variato, o il moto fosse stato uniformemente accelerato; ma $dv + d^2v = dv$, mercè la dottrina degl' infinitesimi; dunque per un istante infinitesimo il moto variato ha da prendersi come uniformemente accelerato. E di qui ne viene che nel moto uniformemente accelerato la forza acceleratrice essendo sempre eguale all'aumento della velocità diviso pel tempo nel quale questo aumento è prodotto, se indichiamo con ϕ questa forza, sarà per qualunque moto variato in un istante qualunque dt alla fine del tempo t, $\phi = \frac{dv}{dt}$; ma $dv = \frac{d^2s}{dt}$, dunque $\phi = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Io termino ora questa appendice, giacchè le poche cose che ho detto, sembrami ~~che~~ bastino a soddisfare all' oggetto pel quale io l'ho scritta.

Stampato per cura di Leonardo Nardini,
Ispettore della Stamperia Reale.

NOTA

AL § III DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

Siccome nelle curve piane il luogo geometrico dei centri dei circoli osculatori è sempre la sviluppata della curva cui esso appartiene, così si può dimandare se anco nelle curve a doppia curvatura il luogo dei centri possiede lo stesso pregio. Il signor Monge dimostra che in sì fatte curve quel luogo geometrico non può mai formare la sviluppata della curva a doppia curvatura, ed il signor Lagrange maestrevolmente trattando lo stesso soggetto nella seconda parte della sua Teorica delle funzioni analitiche, trova che una curva a doppia curvatura non può mai avere per isviluppata la sua curva dei centri, se tra le di lei coordinate non vi è una certa relazione la quale consiste in una equazione differenziale che lo stesso Geometra assegna. Si poteva dunque sospettare che l'opinione del Lagrange non fosse conforme a quella di Monge, in quanto che sembrava che tacitamente credesse potervi essere qualche caso nel quale, essendo soddisfatta quella equazione di condizione, la curva a doppia curvatura avesse per isviluppata la curva dei centri. A questo proposito piacemi di far manifesto al pubblico che il signor colonnello cavaliere Caccianino, direttore della scuola d'artiglieria a Modena, uomo peritissimo nelle matematiche, mi ha comunicato un suo scritto nel quale colle stesse dottrine del Lagrange ei dimostra che quell'equazione di condizione non può di natura sua mai esser soddisfatta, se non quando la curva è piana, mentre per le curve a doppia curvatura essa condurrebbe all'assurdo; così l'equazione di condizione assegnata dal Lagrange gli ha somministrato il modo di provare colla luminosa dottrina delle funzioni analitiche il teorema di Monge.

Fig. 14.

Fig. 16.

Fig. 18.

Fig. 21.

Fig. 23.

Fig. 26.


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI





